ECUACIONES ALGEBRÁICAS

Objetivo general

Este curso pretende introducir este tema de ecuaciones **desde su sentido lógico y cotidiano**, antes de introducir símbolos o fórmulas. La idea es que el estudiante **entienda lo que significa una igualdad** y **por qué se hacen ciertos pasos**, no solo “cómo se resuelve”.

La idea es **comenzar con el sentido, no con la definición**. Por eso, antes de decir que “una ecuación es una igualdad con incógnitas” es explicarlo de la manera más simple.

Ejemplo:
Imaginemos que tienes una balanza.
En un lado colocas una caja con cosas dentro, y en el otro, tres kilos de frutas.
Si la balanza está equilibrada, eso quiere decir que **la caja pesa lo mismo que las frutas**.

Matemáticamente, eso se escribe como una **igualdad**.
Si quieres saber cuánto pesa la caja, **estás resolviendo una ecuación**. Así se podrá **asociar la ecuación con una situación concreta**, no con un símbolo abstracto.

Usaremos un lenguaje cotidiano antes que técnico.

En vez de explicar directamente, plantearemos una secuencia de **preguntas reflexivas**:

¿Qué significa que algo esté equilibrado?
Si quito 2 kilos de un lado, ¿qué pasa con el otro?
¿Y si multiplico todo por 3, se rompe el equilibrio?

La idea es activar el **razonamiento natural**, no la memorización mecánica.

Por ejemplo:

Ana y Luis compraron helados. Ana pagó el doble que Luis y juntos gastaron $9.
¿Cuánto gastó cada uno?

Antes de escribir la ecuación, veamos el sentido:

¿Qué significa “el doble”?
¿Cómo se expresaría eso sin números?

Otra vez, volvamos a comentar en la definición del problema.
Ana y Luis compraron helados. Ana pagó el doble (**2x**) que Luis (**x**) y juntos gastaron $**9**.
Es decir, que **x** significa la compra de helados. Finalmente el número **9** después del signo **=**.

Esto se expresa matemáticamente por una ecuación:

$$2x + x = 9$$

El objetivo de esto es **entender qué representa cada símbolo**.

Primero:
Tenemos algo que no sabemos cuánto vale.

Luego:
Le pondremos una letra para no decir ‘**la cosa que no sabemos’**.
Usaremos la letra **x**.
De esa forma, **la incógnita tiene sentido**.

Veamos como algunas palabras técnicas pueden ser reemplazadas por expresiones comprensibles.

Técnico	**Alternativa comprensible**
incógnita	número que no conocemos
transponer	mover al otro lado
coeficiente	número que acompaña a la letra
término independiente	número que está solo
reducir	juntar los parecidos
despejar	dejar sola la letra

Antes de preguntar “¿cuánto vale **x**?”, preguntemos:

¿Qué nos está diciendo esta ecuación?
¿Qué significa que sea igual?
¿Qué pasaría si cambio un número?

Algunas ideas visuales efectivas:

Concepto	**Imagen sugerida**
Igualdad	Balanza o balancín
Variable	Caja cerrada o incógnita con signo de pregunta
Operaciones inversas	Flechas que van en sentido contrario
Multiplicación	Agrupar cajas iguales
División	Repartir objetos en partes iguales

Ejemplo
Tienes dos platos en una balanza. Si **pesan igual,** la balanza está **nivelada**.
Si quitas una manzana de un lado, ¿qué debes hacer con el otro lado para que siga nivelada?

Eso es como decir:
5 + 3 = 8 (La balanza está nivelada)

Si quito 1 manzana de un lado:
5 + 3 (-1) = 8
5 + 2 = 6 (ya no está nivelada)

Si quito 2 en ambos lados:
5 + 3 (-2) = 8 (-2)
5 + 1 = 6 (La balanza está nivelada)

Entonces: **hay que hacer lo mismo en ambos lados** para mantener nivelada la balanza.

Conclusión:
Una **igualdad** es como una **balanza**: se mantiene equilibrada si haces lo mismo en ambos lados.

Las **ecuaciones algebraicas** son igualdades que contienen **una o más incógnitas (variables)** y **operaciones algebraicas** (suma, resta, multiplicación, división, potencias, raíces, etc.). Su objetivo principal es **encontrar el valor o los valores de las incógnitas** que hacen verdadera la igualdad.

Pero antes de entrar al tema, será oportuno ver lo que significa una igualdad.

Igualdad Aritmética

Una igualdad aritmética es una expresión que afirma que dos cantidades son iguales, y no contiene incógnitas. Es simplemente una afirmación verdadera (o falsa).

Ejemplo de **igualdad verdadera**:
3 + 5 = 8 .
Es cierta siempre.

Ejemplo de **igualdad falsa**:
2 x 7 = 15 .
No es cierta.

En estos casos, como no hay variables, no hay que resolver nada, simplemente verificar si es verdadero o falso.

Una forma de alterar una igualdad sería que lo que se agregue de un lado, se agregue lo mismo del otro.
Por ejemplo:
3 + 2 = 5.
Esta igualdad es cierta

Si alteramos esta igualdad, para que sea válida esta debe ser alterada en ambos lados.
Asi, $3 + 2 + 8 = 5 + 8$.
Observe que se mantiene válida la igualdad.

La alteración puede ser:
Sumada o restada, así como multiplicada o dividida.
Esta característica es muy importante para el manejo de ecuaciones algebraicas.

¿Qué significa 'despejar una variable'?

Despejar una variable es dejarla sola en un lado de la ecuación, para saber su valor.
El objetivo es que quede de la forma :
x = (número).

Si la igualdad contiene una letra (no solo números), esta igualdad se convierte en una ecuación. Una ecuación es una igualdad matemática que contiene una o más variables (incógnitas) y que se cumple sólo para ciertos valores de esas variables.

En otras palabras, es una expresión que afirma que dos cantidades son iguales, pero en la que no conocemos el valor de la(s) variable(s) y debemos encontrarlo(s).

Ejemplo de ecuación:

$x + 3 = 7$.
Aquí: 'x' es la variable o incógnita. La ecuación es verdadera sólo si $x = 4$.

Partes de una ecuación :

Miembros:
Cada lado del signo igual (=).

Ejemplo:
en $2x + 1 = 9$.
Lado izquierdo: $2x + 1$.
Lado derecho: 9.
Términos: Cada parte que se suma o se resta.

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la variable que hace que la igualdad sea cierta.

Reglas fundamentales

Suma y resta en ambos lados:

Si un número está sumando o restando junto a la variable, se hace la operación contraria al otro lado:
Si suma, pasa restando.
Si resta, pasa sumando.

Ejemplo :
$x + 3 = 7$.

Para dejar 'x' sola, restas 3 en ambos lados:
$x + 3 - 3 = 7 - 3 = 4$.
(Del lado izquierdo $+3-3=0$, del lado derecho $7-3=4$).

Multiplicación y división en ambos lados:

Si la variable está multiplicada o dividida por un número, se hace la operación contraria:
Si está multiplicando, pasa dividiendo.
Si está dividiendo, pasa multiplicando.

Ejemplo:
$4x = 20$.
Para dejar ´x´ sola, divides entre 4:
$4x / 4 = 20 / 4$ (Del lado izquierdo $4/4 = 1$, del lado derecho $20/4 =5$.
$X = 5$.

Definición de Ecuación Algebraica

Una ecuación algebraica es una igualdad matemática que contiene una o más variables (incógnitas) y operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potencias, raíces).

Ejemplo:
$2x + 3 = 11$.

Partes de una ecuación

Miembros: Lado izquierdo (LI) y lado derecho (LD) de la igualdad.

Ejemplo:
$2x + 3 = 8$.

Términos:

Cada parte separada por + o −.
En $2x + 3 = 11$, los términos son 2x, 3 y 11.
Variable o incógnita:
letra que representa un número desconocido (por lo general ´x´, ý´, etc.).

Coeficiente:

número que multiplica a una variable.
En 2x, el coeficiente es 2.

Clasificación de Ecuaciones Algebraicas

a) Por el grado de la ecuación:

El grado es el exponente mayor de la variable:
Lineal (grado 1) $ax + b = 0$.
Ejemplo: $3x - 5 = 10$.

Cuadrática (grado 2) $ax^2 + bx + c = 0$.
Ejemplo: $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Cúbica (grado 3) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
Ejemplo: $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$

b) Por número de variables:

Una variable: $2x + 1 = 9$.
Dos variables: $2x + y = 5$.
Tres o más variables: $x + y + z = 12$.

Resolución de Ecuaciones Algebraicas

Ecuaciones de primer grado (lineales):

Pasos para resolver:

1. Eliminar paréntesis (si los hay).
2. Agrupar términos semejantes.
3. Transponer términos (cambiar de lado).
4. Despejar la incógnita.

Ejemplos: $3x - 5 = 10$, $3x = 10 + 5$, $3x = 15$, $x = 15 / 3 = 5$

Ecuaciones de segundo grado (cuadráticas):

Forma general:
$ax^2 + bx + c = 0$.

Métodos de resolución:

Factorización, Completando el trinomio cuadrado perfecto,

Fórmula general:
$x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)} / 2a$.

Ejemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Factorizando: $(x - 2)(x - 3) = 0$.
Soluciones : $x = 2, x = 3$."

"¿Qué es una ecuación de primer grado?

Una ecuación de primer grado es una igualdad que contiene una variable (como 'x') y en la que dicha variable no está elevada a ninguna potencia mayor que 1.

Forma general: **ax + b = 0**

donde:
'**a**' y '**b**' son números reales y
'**x**' es la incógnita o variable.
a ≠ 0 (si a = 0, no hay variable, y no sería de primer grado).

Pasos para resolver una ecuación de primer grado

Ejemplo: 3x - 5 = 10.

Paso 1: Aislar la variable en un lado.
3x - 5 = 10 (sumamos 5 a ambos lados).
Paso 2: Simplificar.
3x = 15
Paso 3: Dividir entre 3 cada lado. Despejar la variable.
x = 15 / 3. x = 5.

Observaciones importantes:

1. Siempre se deben realizar las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación.
2. Si la ecuación tiene fracciones, se puede multiplicar por el mínimo común denominador (m.c.d.) para simplificar.
3. Una ecuación de primer grado tiene una única solución real.

Pasos clave a recordar

1. Quitar paréntesis si los hay.
2. Reducir términos semejantes en cada lado.
3. Mover todas las variables a un lado y números al otro lado.
4. Despejar la variable dividiendo o multiplicando.
5. Comprobar la solución sustituyendo en la ecuación original.

EJEMPLOS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ejemplos prácticos de ecuaciones de primer grado

Ejemplo 1:

Compras en una tienda.

Problema:
Juan compra 3 camisetas al mismo precio y paga en total $600.
¿Cuánto cuesta cada camiseta?

Ecuación:
$3x = 600$

Solución:
$x = 600 / 3$
$x = 200$
Cada camiseta cuesta $200.

Ejemplo 2:
Edad.
Problema:
Ana tiene 4 años más que su hermano. Si juntos tienen 28 años, ¿cuántos años tiene su hermano?

Sea:
x = edad del hermano,
$x + (x + 4) = 28$.

Solución:
$2x + 4 = 28$
$2x = 24$
$x = 12$
El hermano tiene 12 años.

Ejemplo 3:
Ahorros.
Problema:
Pedro ahorra $50 cada mes. ¿Cuántos meses necesita para juntar $600?

Ecuación:
$50x = 600$

Solución:
$x = 600 / 50$
$x = 12$
Necesita 12 meses.

Ejemplo 4:
Recorrido.
Problema:
Un taxi cobra $20 de bajada de bandera más $15 por cada kilómetro recorrido. Si al final el total es $110, ¿cuántos kilómetros recorrió?"

Ecuación:
$15x + 20 = 110$

Solución:
$15x = 90$
$x = 90 / 15$
$x = 6$
Recorrió 6 kilómetros.

Ejemplo 5:
Notas escolares.
Problema:
Para aprobar un curso necesitas un promedio de 70 puntos. Si tus 3 primeros exámenes suman 200 puntos, ¿qué calificación necesitas en el cuarto examen para aprobar?

Sea:
x = calificación del cuarto examen

Ecuación:
$(200 + x) / 4 = 70$

Paso 1:
Multiplicar ambos lados por 4:
$4 (200 + x) / 4 = 70 \times 4$
$200 + x = 280$

Paso 2:
Restar 200
$200 + x -200 = 280 - 200$
$x = 80$
Necesita 80 puntos

Ejemplo 6:
Precio con descuento.
Problema:
Un producto cuesta $x pesos, y con un descuento de $35 cuesta $115. ¿Cuál era el precio original?

Ecuación:
$x - 35 = 115$

Solución:
$x = 115 + 35$
$x = 150$
Precio original: $150.

Ejemplo 7:
Trabajo.
Problema:
Luis cobra $250 por día trabajado. Si ganó $2250, ¿cuántos días trabajó?

Ecuación:
$250x = 2250$

Solución:
$x = 2250 / 250$
$x = 9$
Trabajó 9 días.

Las ecuaciones de segundo grado

también llamadas ecuaciones cuadráticas, son aquellas que tienen la siguiente

Forma general: $\mathbf{a(x^2) + bx + c = 0}$

donde:

a, **b**, **c** son números reales ($a \neq 0$).
'**x**' es la variable o incógnita.
a: Coeficiente cuadrático (acompaña a (x^2))
b: Coeficiente lineal (acompaña a 'x') y
c: Término independiente.

Métodos para resolver una ecuación de segundo grado

1. Fórmula general: $x = (-b \pm \sqrt{[(b^2) - 4ac]}) / 2a$
   El valor dentro de la raíz, $\mathbf{\Delta = (b^2) - 4ac}$ se llama **discriminante** y nos dice el tipo de solución:

   $\mathbf{\Delta} > 0$ Dos raíces reales y distintas.
   $\mathbf{\Delta} = 0$ Dos raíces reales e iguales.
   $\mathbf{\Delta} < 0$ Dos raíces complejas conjugadas

2. Factorización (cuando es posible):
   Ejemplo: $(x^2) - 5x + 6 = 0$, entonces $(x - 2)(x - 3) = 0$, por tanto : $x = 2$, $x = 3$.

3. Completando el trinomio cuadrado perfecto:
   Este método transforma la ecuación para que tenga forma de cuadrado perfecto.
   Ejemplo:
   $(x^2) + 6x + 5 = 0$,
   $(x^2) + 6x = -5$
   $(x^2) + 6x + 9 = -5 + 9$
   $(x + 3)^2 = 4$
   entonces $x + 3 = \pm 2$,

por tanto: $x = -1$, $x = -5$

4. Uso de la gráfica:
La ecuación representa una parábola: Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. Las soluciones son los puntos donde la parábola corta al eje 'x'.

Ejemplo resuelto con fórmula general:
Resuelve:

$$2(x^2) - 4x - 6 = 0$$

Identificamos:
$a = 2$,
$b = -4$,
$c = -6$

Calculamos el discriminante:
$\Delta = (b^2) - 4\,ac$
$\Delta = (-4)^2 - 4\,(2)\,(-6) = 16 + 48 = 64$

Sustituimos en la fórmula:
$x = (-(-4) \pm \sqrt{64}) / 2\,(2) = (4 \pm 8)/4$

entonces:
$\mathbf{x1} = 12 / 4 = 3$, $x\mathbf{2} = -4 / 4 = -1$

FACTORIZACIÓN

¿Qué es la factorización?

La factorización consiste en escribir una expresión algebraica como el producto de dos o más factores. Es decir, descomponer algo en 'piezas' que, multiplicadas entre sí, nos devuelven la expresión original.

Por ejemplo:

$$6 = 2 \times 3$$

Aquí, 2 y 3 son factores de 6.
En álgebra, ocurre lo mismo pero con letras y operaciones.

¿Para qué sirve?

La factorización es útil porque:

Permite simplificar expresiones.
Ayuda a resolver ecuaciones fácilmente.
Permite identificar raíces de polinomios.
Es base de divisiones algebraicas. "

Casos de factorización algebraica

Factor común:

Si todos los términos tienen un factor común, se saca 'fuera del paréntesis'.

Ejemplo:

$$6x + 9 = 3(2x + 3)$$

Aquí el factor común es el 3.

Factor común por agrupación:

Se agrupan términos en pares que tengan factor común.

Ejemplo:

$$ax + ay + bx + by$$

Agrupamos:

$$a(x + y) + b(x + y)$$

Ahora, el factor común es $(x + y)\ (a + b)$

Trinomio cuadrado perfecto:

Si la expresión tiene esta forma:

$(a^2) + 2ab + (b^2) = (a + b)^2$

Ejemplo:

$(x^2) + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Diferencia de cuadrados:

Toda expresión de este tipo: $(a^2) - (b^2) = (a + b)(a - b)$

Ejemplo:

$(x^2) - 25 = (x + 5)(x - 5)$

Trinomio cuadrado de la forma:

$(x^2) + bx + c$

Buscamos dos números que multiplicados den 'c' y sumados den 'b'

Ejemplo:

$(x^2) + 5x + 6$

números 2 y 3 $(x + 2)(x + 3)$

Suma y diferencia de cubos:

$(a^3) + (b^3) = (a + b)((a^2) - ab + (b^2))$
$(a^3) - (b^3) = (a - b)((a^2) + ab + (b^2))$

Ejemplo:

$(x^3) - 8 = (x - 2)((x^2) + 2x + 4)$

Resumen:
La factorización es una técnica para reescribir expresiones como producto de factores.
Es clave para simplificar y resolver ecuaciones.

PRODUCTOS NOTABLES

¿Qué son Productos Notables?

Son fórmulas que permiten multiplicar polinomios de manera rápida, sin hacer la multiplicación término por término. Se llaman 'notables' porque aparecen con mucha frecuencia y conviene memorizarlos. A continuación te muestro los más importantes:

1. Cuadrado de un binomio:

Multiplicar un binomio por sí mismo:

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

Desarrollo paso a paso:

Distribuyes cada término del primer binomio con cada término del segundo:

1. $(a \times a) = (a^2)$
2. $(a \times b) = ab$
3. $(b \times a) = ba = ab$
4. $(b \times b) = (b^2)$

Luego, sumas términos semejantes:

$(a^2) + ab + ab + (b^2) = (a^2) + 2ab + (b^2)$

Fórmulas:

SUMA

$(a + b)^2 = (a^2) + 2ab + (b^2)$

RESTA

$(a - b)^2 = (a^2) - 2ab + (b^2)$

2. Producto de binomios conjugados:

Multiplicar un binomio por su conjugado:

$(a + b)(a - b)$

Desarrollo paso a paso:

1. $(a \times a) = (a^2)$
2. $a \times (-b) = -ab$
3. $(b \times a) = +ab$
4. $b \times (-b) = -(b^2)$

Suma de términos semejantes:

$(a^2) - ab + ab - (b^2)$

Fórmula:

$$(a + b)(a - b) = (a^2) - (b^2)$$

3. Cubo de un binomio:

Multiplicar un binomio por sí mismo 3 veces:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$$

Fórmulas desarrolladas:

SUMA

$$(a + b)^3 = (a^3) + 3(a^2)b + 3a(b^2) + (b^3)$$

RESTA

$$(a - b)^3 = (a^3) - 3(a^2)b + 3a(b^2) - (b^3)$$

4. Producto de binomios con un término común:

Multiplicar binomios de la forma:

$$(x + a)(x + b)$$

Desarrollo paso a paso:

1. $(x . x) = x^2$
2. $(x . b) = bx$
3. $(a . x) = ax$
4. $(a . b) = ab$

Sumamos términos semejantes:

$$(x^2)(a + b)x + ab$$

Fórmula:

$$(x + a)(x + b) = (x^2) + (a + b)x + ab$$

5. Suma y diferencia de cubos:

Son factorizaciones especiales de cubos:

SUMA de cubos:

$$(a^3) + (b^3) = (a + b)((a^2) - ab + (b^2))$$

RESTA de cubos:

$$(a^3) - (b^3) = (a - b)((a^2) + ab + (b^2))$$