

# Límites y Continuidad

## ¿Qué es un Límite?

El límite es un concepto fundamental en cálculo que describe el **comportamiento** de una función a medida que la variable independiente (generalmente **x**) se acerca a un valor particular.

## Definición Intuitiva

El límite de una función **f(x)** cuando **x** se aproxima a un número **a** es el valor **L** al que se acerca **f(x)** (el valor de **y**), **sin que importe necesariamente qué sucede exactamente en el punto x = a**.

Se escribe formalmente así:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

## Piensa en ello como una Tendencia:

Si caminas hacia una pared (el valor **a**), el límite es la distancia a la que te acercas (el valor **L**) justo antes de tocarla o, incluso, si la atraviesas por un agujero. El límite describe el destino, no el punto de partida o llegada final.

**Lo que importa:** La función en las cercanías de **a**.

**Lo que no importa:** El valor de la función **f(a)** en el punto exacto **a**.

## Ejemplo Clave (Discontinuidad Evitable)

Considera la función  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ .

1. Si intentas calcular  $f(1)$ , obtienes  $\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$  (Indefinido).

2. Sin embargo, si simplificas la expresión (para  $x \neq 1$ ):

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

3. Al acercarte a  $x = 1$ , la función  $f(x)$  se comporta como  $x + 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

El límite es **2**, aunque la función no existe en  $x = 1$ .

## ¿Por qué se Inventaron los Límites?

Los límites no fueron "inventados" de golpe, sino que surgieron como una herramienta rigurosa para resolver dos problemas fundamentales que la matemática antigua no podía manejar:

### El Problema de la Recta Tangente (Base de la Derivada)

Antes del cálculo, solo se podía calcular la pendiente (inclinación) de una recta o de curvas muy simples. Si tenías una curva compleja, ¿cómo calculabas su inclinación en un punto específico?

**El Problema:** Para calcular la pendiente (**m**) de una recta necesitas dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En una curva, para el punto **P**, solo tienes un punto.

### La Solución con Límites:

Toma un punto **P** y un punto cercano **Q**.

Calcula la pendiente de la recta secante (la que pasa por **P** y **Q**).

Aplica el límite forzando al punto **Q** a **acercarse infinitamente** al punto **P**.

El límite de la pendiente de la recta secante se convierte en la pendiente de la **recta tangente** en el punto **P**.

### La recta secante como aproximación

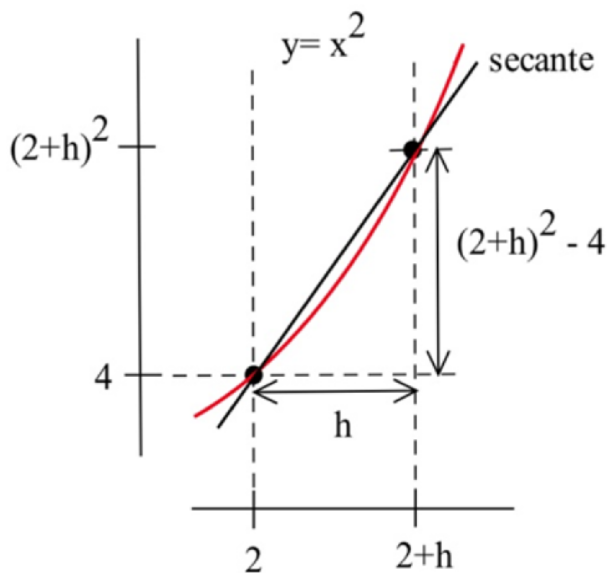
Para una función cualquiera  $f(x)$ , la pendiente entre dos puntos separados por  $h$  es:

$$m = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

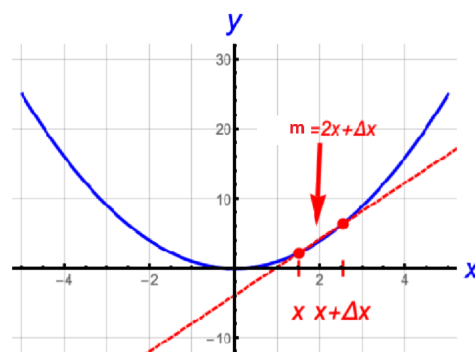
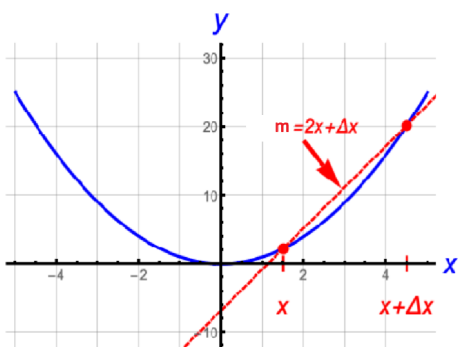
Esta pendiente corresponde a una **secante**, que corta la curva.

Si **h** es grande → mala aproximación.

Si **h** es pequeño → casi toca la curva.

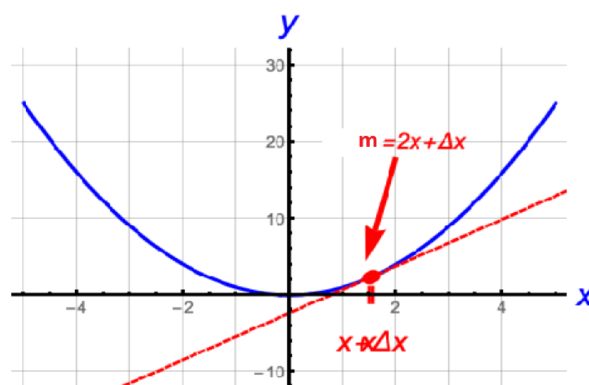


El problema es que **no puedes calcular la pendiente de una curva usando un solo punto**. La pendiente necesita **dos puntos**.



Observando los puntos rojos en las 2 graficas notamos que mientras se acercan ambos puntos entre si, la recta roja **secante** tiende a parecerse a una **tangente** que toca un solo punto de la curva.

Cuando la distancia entre los dos puntos rojos tienda a cero, la grafica se vera así:



Justamente como una **tangente**. Esa es la razón de la fórmula de la **derivada** utilizando el **Límite** cuando **h** tiende a cero.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Este proceso define la **derivada**, que es la base para calcular la velocidad instantánea, las tasas de cambio y la optimización.

### El Problema del Área (Base de la Integral)

¿Cómo se calcula el área bajo una curva irregular (como una parábola o una hipérbola) en un intervalo dado? Las fórmulas geométricas solo servían para rectángulos o círculos.

**El Problema:** Calcular áreas de formas curvas.

### La Solución con Límites:

Divide el área bajo la curva en un número finito de rectángulos (Suma de Riemann).  
Calcula el área de todos esos rectángulos.

Aplica el límite forzando a que el **número de rectángulos tienda a infinito** y su base (ancho) tienda a cero.

Este proceso define la **integral**, que es la base para calcular áreas, volúmenes, trabajo y acumulación.

En resumen, los límites se inventaron para dar **rigor y herramientas** a la matemática para manejar conceptos dinámicos o "instantáneos" (como la velocidad en un instante o la pendiente en un punto) que la geometría estática no podía resolver.

## Definición Formal de Límite (epsilon-delta)

La definición formaliza la idea de que podemos hacer que los valores de  $f(x)$  estén tan cerca del límite  $L$  como queramos, simplemente asegurándonos de que  $x$  esté lo suficientemente cerca de  $a$ .

### El Enunciado Formal

Se dice que el **límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es  $L$** , lo que se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

#### Si y solo si:

Para todo número positivo  $\epsilon$  (épsilon), existe un número positivo  $\delta$  (delta), tal que si la distancia de  $x$  a  $a$  es menor que  $\delta$  (y  $x \neq a$ ), entonces la distancia de  $f(x)$  a  $L$  es menor que  $\epsilon$ .

Esto se expresa matemáticamente así:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

### Desglose y Significado

La definición se entiende mejor analizando el papel de epsilon y delta en la gráfica:

### $\epsilon$ (Épsilon): La Tolerancia en $Y$

**Significado:**  $\epsilon$  representa la distancia máxima de error o la tolerancia que estamos dispuestos a aceptar en el eje vertical (los valores de la función).

**Rango:** La condición  $|f(x) - L| < \epsilon$  significa que los valores de la función  $f(x)$  deben caer dentro del intervalo abierto  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ .

**Elección:**  $\epsilon$  es el valor que **se elige primero** y representa el desafío: podemos elegirlo tan pequeño como queramos.

### $\delta$ (Delta): La Proximidad en $X$

**Significado:**  $\delta$  representa cuán cerca debemos estar del valor  $a$  en el eje horizontal (la variable  $x$ ) para garantizar que la función cumpla con la tolerancia  $\epsilon$ .

**Rango:** La condición  $0 < |x - a| < \delta$  significa que los valores de  $x$  deben caer dentro del intervalo abierto  $(a - \delta, a + \delta)$ , excluyendo el punto  $x = a$  (por eso la condición  $0 < \delta$ ).

**Dependencia:**  $\delta$  es el valor que **se encuentra después** y generalmente depende del valor de  $\epsilon$ .

### La Lógica Clave

La definición establece una relación causa-efecto:

1. **Causa (Condición  $\delta$ ):** Si elegimos  $x$  lo suficientemente cerca de  $a$  (dentro del rango  $\delta$ ),
2. **Efecto (Condición  $\epsilon$ ):** ...entonces podemos garantizar que  $f(x)$  estará tan cerca de  $L$  como se haya pedido (dentro del rango  $\epsilon$ ).

Si logramos encontrar un  $\delta$  adecuado para **cualquier**  $\epsilon$  dado (incluso uno muy, muy pequeño), entonces el límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  queda **demostrado** formalmente.

### Ejemplo de Demostración Formal

**Demostrar que**  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ .

**Identificar:** Tenemos  $f(x) = 2x - 1$ ,  $a = 3$ , y  $L = 5$ .

**Partir de  $\epsilon$ :** Queremos  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Sustituimos:

$$|(2x - 1) - 5| < \epsilon$$

**Simplificar la Expresión:**

$$|2x - 6| < \epsilon$$

Factorizamos 2:

$$|2(x - 3)| < \epsilon$$

$$2|x - 3| < \epsilon$$

**Despejar  $|x - a|$ :** Necesitamos que la expresión final se parezca a  $|x - a| < \delta$ , es decir,  $|x - 3| < \delta$ .

$$|x - 3| < \frac{\epsilon}{2}$$

**Definir  $\delta$ :** Comparando con  $|x - 3| < \delta$ , vemos que  $\delta$  debe ser  $\frac{\epsilon}{2}$ .

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}$$

**Conclusión:** Hemos encontrado que si elegimos  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ , la condición  $|f(x) - 5| < \epsilon$  se cumple. Esto demuestra formalmente que  $\lim_{x \rightarrow 3}(2x - 1) = 5$ .

## Técnicas de Cálculo de Límites

Cuando tienes un límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , el primer paso siempre es la **Sustitución Directa**: simplemente mete el valor de  $a$  en la  $x$ .

- Si obtienes un número real, ¡listo! Ese es el límite.
- Si obtienes algo como  $\frac{0}{0}$ , tienes una **indeterminación** y debes usar una de las siguientes técnicas:

### Factorización y Simplificación

Se usa cuando tienes polinomios en el numerador y el denominador. El objetivo es encontrar el factor  $(x - a)$  que está causando el cero y cancelarlo.

**Ejemplo:** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

**Sustitución:**  $\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$  (Indeterminado).

**Factorizar:** El numerador es una diferencia de cuadrados:  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ .

**Simplificar:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$$

**Evaluar:**  $2 + 2 = 4$ .

## Racionalización (Uso del Conjugado)

Se usa cuando el límite presenta raíces cuadradas. El truco es multiplicar arriba y abajo por el **conjugado** de la expresión con raíz.

**Ejemplo:** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

**Sustitución:**  $\frac{\sqrt{0+9}-3}{0} = \frac{0}{0}$ .

**Multiplicar por el conjugado:** El conjugado de  $\sqrt{x+9}-3$  es  $\sqrt{x+9}+3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}+3)}$$

**Simplificar:** Al multiplicar los numeradores (diferencia de cuadrados), la raíz desaparece:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+9)-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

**Cancelar la  $x$  y evaluar:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

## Límites al Infinito ( $\infty$ ) y Asíntotas

Aquí no nos acercamos a un número, sino que vemos qué pasa cuando  $x$  se hace gigante ( $x \rightarrow \infty$ ).

**Regla de Oro:** Divide cada término entre la potencia más alta de  $x$  que aparezca en el denominador.

**Ejemplo:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{2x^2-1}$

Dividimos todo entre  $x^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}}$$

Sabemos que cualquier número dividido entre infinito tiende a 0:

$$\frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Esto nos dice que la función tiene una **asíntota horizontal** en  $y = 1.5$ .

## Límites Trigonométricos Especiales

Hay límites que no se pueden resolver por álgebra simple y se consideran "teoremas" o límites notables:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

**Importante:** El ángulo debe ser igual al denominador. Por ejemplo, para  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x}$  el resultado también es 1.

### Resumen de estrategia para tu curso:

¿Hay polinomios? → Factoriza.

¿Hay raíces? → Racionaliza.

¿ $x$  tiende a infinito? → Divide entre la potencia mayor.

¿Hay senos o cosenos? → Busca los límites especiales.

## Continuidad

La **continuidad** es el concepto que une los límites con la realidad de la función en un punto dado. De manera sencilla, una función es continua si puedes dibujarla sin despegar el lápiz del papel.

### Las 3 Condiciones de Continuidad

Para que una función  $f(x)$  sea continua en un punto exacto  $x = c$ , debe superar una "prueba" de tres pasos. Si falla cualquiera de estos, la función es **discontinua**.

$f(c)$  **existe:** El punto debe estar definido. No puede haber un "hueco" vacío o una división por cero en ese valor.

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  **existe:** Los límites laterales deben ser iguales. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ : El valor al que la función parece acercarse (límite) debe ser el mismo valor que la función tiene realmente (el punto).

## Tipos de Discontinuidad

Cuando una función falla la prueba anterior, lo hace de formas específicas que podemos clasificar:

### Discontinuidad Evitable (o Removable)

Ocurre cuando el límite existe, pero el punto no existe o está en otro lugar. Se llama "evitable" porque podrías "rellenar" el hueco definiendo un solo punto.

**Ejemplo:**  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  en  $x = 1$ .

### Discontinuidad de Salto (Jump)

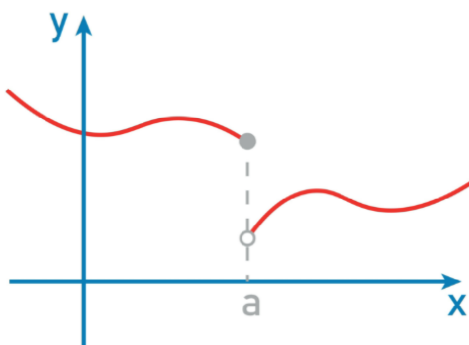
Ocurre cuando los límites laterales existen pero son diferentes. La gráfica literalmente "salta" de un valor de  $y$  a otro. Es común en funciones definidas a trozos.

**Ejemplo:** La función signo o funciones escalonadas.

### Discontinuidad Infinita

Ocurre cuando la función tiende a infinito o - infinito a medida que se acerca al punto. Aquí es donde encontramos las **asíntotas verticales**.

**Ejemplo:**  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x = 0$ .



## Teorema del Valor Intermedio (TVI)

Este es uno de los teoremas más potentes de la continuidad y suele ser un punto clave en los exámenes.

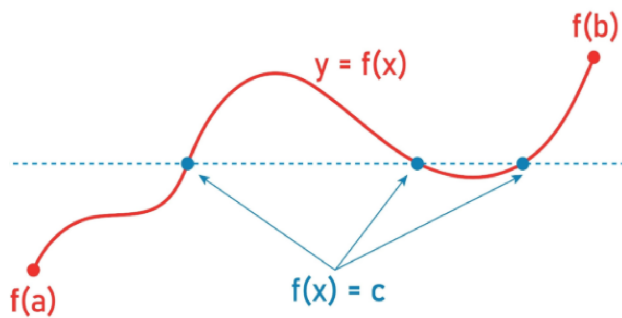
¿Qué dice?

Si una función  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , y  $k$  es cualquier número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces debe existir al menos un número  $c$  entre  $a$  y  $b$  tal que  $f(c) = k$ .

En palabras simples:

Si una función es continua y pasa de un valor negativo a uno positivo, obligatoriamente tuvo que haber cruzado por el cero en algún momento. No puede "saltárselo".

**Aplicación práctica:** Se usa para demostrar que una ecuación tiene solución en un intervalo dado sin necesidad de resolver la ecuación.



## Continuidad en Intervalos

**Intervalo abierto  $(a, b)$ :** La función es continua en cada punto dentro del paréntesis.

**Intervalo cerrado  $[a, b]$ :** Además de ser continua por dentro, debe ser continua por la derecha en  $a$  y por la izquierda en  $b$ . Es decir, los extremos están "conectados" al resto de la gráfica.

### Ejemplo

**Problema:** Hallar el valor de  $k$  para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2 \\ kx, & x \geq 2 \end{cases}$$

### Solución:

Para que sea continua, el límite por la izquierda debe ser igual al límite por la derecha en  $x=2$ :

Límite izquierdo:  $2^2 - 1 = 3$

Límite derecho:  $k(2) = 2k$

Iguales:  $2k = 3 \Rightarrow k = 1.5$

## Ejercicios Resueltos: Límites y Continuidad

### Ejercicio 1: Indeterminación por Factorización

**Enunciado:** Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

**Solución paso a paso:**

1. **Sustitución directa:** Al evaluar en  $x = 3$ , obtenemos  $\frac{3^2 - 9}{3^2 - 2(3) - 3} = \frac{0}{0}$ . Es una indeterminación.
2. **Factorizar:**
  - Numerador (Diferencia de cuadrados):  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
  - Denominador (Trinomio):  $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$
3. **Simplificar:** Cancelamos el factor  $(x - 3)$  que causa el cero:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x + 1}$$

**Evaluar el límite:**

$$\frac{3 + 3}{3 + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

**Resultado:** El límite es 1.5.

## Ejercicio 2: Indeterminación con Raíces (Racionalización)

**Enunciado:** Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

**Solución paso a paso:**

**Sustitución directa:** Obtenemos  $\frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{0}{0}$ .

**Racionalizar:** Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador  $(\sqrt{x} + 2)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2) \cdot (\sqrt{x} + 2)}{(x - 4) \cdot (\sqrt{x} + 2)}$$

**Simplificar el numerador:** Aplicamos  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

**Cancelar y evaluar:**

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

**Resultado:** El límite es 0.25.

## Ejercicio 3: Continuidad en Funciones a Trozos

**Enunciado:** Determine el valor de la constante  $c$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x, & x < 2 \\ x^3 - cx, & x \geq 2 \end{cases}$$

**Solución paso a paso:** Para que  $f(x)$  sea continua en  $x = 2$ , los límites laterales deben ser iguales:

**Límite por la izquierda ( $x \rightarrow 2^-$ ):**

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (cx^2 + 2x) = c(2)^2 + 2(2) = 4c + 4$$

**Límite por la derecha ( $x \rightarrow 2^+$ ):**

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - cx) = (2)^3 - c(2) = 8 - 2c$$

**Igualar para asegurar continuidad:**

$$4c + 4 = 8 - 2c$$

**Resolver para  $c$ :**

$$4c + 2c = 8 - 4 \implies 6c = 4 \implies c = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

**Resultado:** La función es continua si  $c = 2/3$ .

#### Ejercicio 4: Teorema del Valor Intermedio (TVI)

**Enunciado:** Demuestre que la ecuación  $x^3 - x - 1 = 0$  tiene al menos una solución en el intervalo  $[1, 2]$ .

**Solución paso a paso:**

1. **Definir la función:** Sea  $f(x) = x^3 - x - 1$ . Es una función polinómica, por lo tanto, es **continua** en toda la recta real.
2. **Evaluar los extremos del intervalo:**
  - $f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$  (Valor negativo)
  - $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 2 - 1 = 5$  (Valor positivo)
3. **Aplicar el TVI:** Como  $f(1) < 0$  y  $f(2) > 0$ , y la función es continua, el Teorema del Valor Intermedio garantiza que existe al menos un número  $c$  en el intervalo  $(1, 2)$  tal que  $f(c) = 0$ . **Conclusión:** La ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo dado.

## Introducción al Cálculo y Noción de Límite

### El Problema de la Recta Tangente

El cálculo surge de dos grandes problemas:

**Recta Tangente:** Calcular la **pendiente instantánea** en un punto de una curva. (Lleva al concepto de Derivada, que se define mediante un límite).

**Área:** Calcular el área bajo una curva. (Lleva al concepto de Integral, que se define mediante un límite de sumas).

### Noción Intuitiva de Límite

Cuando decimos que el límite de **f(x)** cuando **x** se acerca a **a** es **L**, escribimos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . Esto significa que, a medida que **x** toma valores cada vez más cercanos a **a** (sin ser **a**), los valores de **f(x)** se acercan cada vez más al valor **L**.

**Ejemplo:** Considera  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

Si  $x = 2$ , la función es **indefinida** 0/0.

Si tomamos valores cercanos a 2:

$x \rightarrow 2^-$ (Desde la izquierda)	$f(x)$	$x \rightarrow 2^+$ (Desde la derecha)	$f(x)$
1.9	3.9	2.1	4.1
1.99	3.99	2.01	4.01
1.999	3.999	2.001	4.001

Observamos que tanto por la izquierda como por la derecha, **f(x)** se acerca a **4**. Por lo tanto,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ .

**Límites Laterales y Existencia:** El límite **existe** si y solo si:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Si los límites laterales son diferentes, el límite **no existe**.

## Definición Formal de Límite y Propiedades

### Definición Formal (Épsilon-Delta)

Esta definición da el rigor matemático:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  si para todo número  $\epsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que: si  $0 < |x - a| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

$\epsilon$  (épsilon) es la tolerancia en el eje  $Y$  (cuán cerca queremos que esté  $f(x)$  de  $L$ ).

$\delta$  (delta) es la distancia que  $x$  debe estar de  $a$  para cumplir con la tolerancia  $\epsilon$ .

### Leyes de los Límites

Suponiendo que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existen, se cumplen:

Ley	Descripción	Fórmula
<b>Suma</b>	El límite de una suma es la suma de los límites.	$\lim(f + g) = \lim f + \lim g$
<b>Producto</b>	El límite de un producto es el producto de los límites.	$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$
<b>Cociente</b>	El límite de un cociente es el cociente de los límites (si $\lim g \neq 0$ ).	$\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim f}{\lim g}$
<b>Potencia</b>	El límite de una función elevada a una potencia es el límite de la función elevado a la potencia.	$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

### Límites por Sustitución Directa

Si  $f$  es una función polinomial o una función racional y  $a$  está en el dominio de  $f$ , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Indeterminación:** Si al sustituir  $x = a$  obtenemos las formas  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$ , no podemos determinar el límite directamente y se requieren técnicas de simplificación.

### Técnicas de Cálculo de Límites

#### Eliminación de Indeterminación 0/0

El objetivo es simplificar la expresión para eliminar el factor que causa que el numerador y el denominador se anulen en  $x = a$ .

### Factorización y Simplificación:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

### Racionalización:

Se usa para expresiones con raíces cuadradas, multiplicando por el conjugado del término que contiene la raíz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$$

Se multiplica por el conjugado ( $\sqrt{x + 1} + 1$ ) para obtener:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

### Límites que Involucran el Infinito

Estos límites ayudan a determinar el comportamiento a largo plazo de una función y sus asíntotas.

#### Límites al Infinito ( $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ ):

Se divide el numerador y el denominador por la potencia más alta de  $x$  en el denominador.

#### Regla Práctica:

Si grado del Num. < grado del Den.: Límite es **0** ( $\implies$  Asíntota Horizontal  $y = 0$ ).

Si grado del Num. = grado del Den.: Límite es el **cociente de los coeficientes principales** ( $\implies$  Asíntota Horizontal  $y = L$ ).

Si grado del Num. > grado del Den.: Límite es : Límite es  $\pm\infty$  (No hay Asíntota Horizontal).

#### Límites Infinitos ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ):

Ocurren cuando el denominador se acerca a cero y el numerador se acerca a un número diferente de cero.

Indican la presencia de una **Asíntota Vertical** en  $x = a$ . Se debe analizar el signo de la función en cada lado de  $a$  para determinar si el límite es  $+\infty$  o  $-\infty$ .

## Límites Trigonométricos Especiales

Necesarios para el cálculo de derivadas de funciones trigonométricas.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

## Continuidad

### Definición Formal de Continuidad

La función  $f$  es **continua en  $x = a$**  si se cumplen las tres condiciones:

**$f(a)$  está definido.** (El punto existe).

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  **existe.** (No hay saltos, los límites laterales son iguales).

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . (El límite es igual al punto, no hay agujeros).

### Tipos de Discontinuidad

Tipo	Descripción	Condición de Falla
<b>Evitable (Removable)</b>	Hay un 'agujero' en la gráfica.	Se cumple (2), pero falla (1) o (3).
<b>Salto (Jump)</b>	Hay un 'salto' abrupto.	Falla (2): $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .
<b>Infinita</b>	Comportamiento asintótico.	Falla (2): Uno o ambos límites laterales son $\pm\infty$ .

### Continuidad en un Intervalo

**Continuidad Abierta:**  $f$  es continua en  $(a, b)$  si es continua en cada punto entre  $a$  y  $b$ .

**Continuidad Cerrada:**  $f$  es continua en  $[a, b]$  si es continua en  $(a, b)$ , es continua por la derecha en  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ) y continua por la izquierda en  $b$  ( $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ).

### Teorema del Valor Intermedio (TVI)

Este teorema garantiza la existencia de un valor.

**Teorema del Valor Intermedio:** Si  $f$  es una función **continua** en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , y sea  $N$  cualquier número entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe al menos un número  $c$  en el intervalo  $(a, b)$  tal que  $f(c) = N$ .

**Aplicación Clave:** Se utiliza para demostrar que una ecuación, como  $f(x) = 0$ , tiene al menos una raíz dentro de un intervalo específico, siempre que  $f(a)$  y  $f(b)$  tengan signos opuestos.