LOS NÚMEROS

¿ Que son los Números ?

Los números son símbolos o signos que usamos para contar, medir, ordenar y realizar operaciones matemáticas. Son una de las herramientas más fundamentales del pensamiento humano, esenciales en actividades diarias como comprar, medir distancias, calcular tiempos, resolver problemas, y desarrollar ciencia y tecnología."

¿ Para qué sirven los números ?

1. Contar objetos : 1 manzana , 2 sillas , 3 personas.
2. Medir magnitudes : peso , distancia , temperatura , tiempo.
3. Hacer operaciones : sumar , restar , multiplicar y dividir.
4. Describir cantidades : grandes o pequeñas , exactas o aproximadas.
5. Ordenar elementos: primero , segundo , tercero.
6. Representar información : estadísticas , códigos , precios , etc.

Clasificación de los Números

1. Números Naturales ($\mathbb{N}$)

Los números naturales son los primeros números que aprendemos desde niños y se usan para contar objetos. Son los números enteros positivos.
El conjunto de números naturales se representa con la letra N y puede definirse de dos formas, dependiendo de si se incluye el cero o no:

Sin incluir el cero: N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, …},
Incluyendo el cero (versión moderna): No = {0, 1, 2, 3, 4, 5, …}"

Propiedades de los números naturales:

1. Son infinitos: (No tienen fin).
2. Ordenados: (Siempre puedes decir cuál es mayor o menor)."
3. Cerrados bajo la suma y la multiplicación:
   (Si sumas o multiplicas dos números naturales, el resultado también es natural).
   Ejemplo: 3 + 4 = 7 y 2 × 5 = 10 (ambos son naturales).
4. No cerrados bajo la resta ni la división:
   Ejemplo: 3 − 5 = -2, no es natural; 5 ÷ 2 = 2.5 tampoco es natural."

Características:

No incluyen valores negativos ni el cero (aunque en algunos contextos si se considera el 0.
No tienen decimales ni fracciones.

2. Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Los números enteros amplían el conjunto de los números naturales al incluir también los números negativos y el cero. Son muy útiles para representar cantidades por debajo de cero, como temperaturas bajo cero o deudas.

El conjunto de los números enteros se representa con la letra Z (del alemán Zahlen, que significa 'números'): Z = { ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

Clasificación de los números enteros:

Enteros positivos: 1, 2, 3, 4, 5, …
Cero: 0 (neutro, no es ni positivo ni negativo)
Enteros negativos: -1, -2, -3, -4, -5, …"

Propiedades de los números enteros:

1. Infinitos hacia ambos lados: positivos y negativos.

2. Cerrados bajo suma, resta y multiplicación.
   Ejemplo: $-3 + 7 = 4$ $-4 - 5 = -9$ $-2 \times 3 = -6$

3. No cerrados bajo la división:
   Ejemplo: $5 \div 2 = 2.5$ (no es entero) "

4. Tienen simétrico aditivo:
   Todo número tiene su opuesto (el mismo número pero con signo contrario).
   Ejemplo: el opuesto de 5 es −5."

3. Números Racionales ($\mathbb{Q}$)

Los números racionales son aquellos que se pueden expresar como fracción de dos números enteros (Z). Es decir, cualquier número que se pueda escribir como: a / b ,
donde 'a' esta contenido en Z ,
'b' esta contenido en Z y
'b' es diferente de 0

El conjunto de los números racionales se representa con la letra Q, del latín quotient (cociente):

Q = { a / b , 'a' y 'b' contenidos en Z, y 'b' diferente de 0 }

Ejemplos de números racionales:

Fracciones comunes: 1 / 2 , - 4 / 7 , 5 / 1 , 0 / 3
Números enteros también son racionales: 3 = 3 / 1 , - 8 = - 8 / 1
Decimales exactos: 0.75 = 3 / 4 , 2.5 = 5 / 2
Decimales periódicos: 0.3333... = 1 / 3 , 1.6666... = 5 / 3

Propiedades:

1. Cerrados bajo suma, resta, multiplicación y división (excepto división entre 0).
2. Tienen representación decimal: finita o periódica."
3. Densidad : entre dos racionales siempre hay otro racional.
4. Simétrico y recíproco : El opuesto de a / b es - a / b

4. Números Irracionales (I)

Los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como fracción de dos números enteros. Su representación decimal nunca termina y nunca se repite.

El conjunto de los números irracionales incluye todos los números reales que no son racionales :
Es decir, irracional = real pero no racional.

Ejemplos comunes :"

Raíces no exactas :
raiz cuadrada de √2, raiz cuadrada de √3, raiz cuadrada de √5, raiz cuadrada de √7, . . .
(Porque no tienen raíz cuadrada exacta entera)

Constantes matemáticas :
π (Pi): 3.14159265358979 . . . ,
e (Euler): 2.71828182845904 . . ."

Decimales no periódicos :
Números como : 0.101001000100001 . . ."

5. N**úmeros Reales (ℝ)**

Los números reales son todos los números que se pueden ubicar en la recta numérica.
Incluyen tanto los racionales como los irracionales.
El conjunto de números reales, representado por R, incluye: R = Q unión con R y Q

Es decir :

R = Números racionales (fracciones, enteros, decimales exactos o periódicos) + Números irracionales (decimales infinitos no periódicos)

Propiedades de los Números Reales :

1. Pueden representarse en la recta numérica.
2. Se pueden ordenar.
3. Están cerrados bajo suma, resta, multiplicación y división (excepto dividir por 0).

4. Entre dos números reales siempre hay otro real.
5. Incluyen infinitos elementos.

Clasificación de los Números Reales (R)

Números Reales R
 Números Racionales Q
  Números Enteros Z
   Números Naturales N
  Fracciones y Decimales periódicos y exactos
 Números Irracionales
 Número π (Pi),
Raíz cuadrada de 2,
número (e), etc. ,
Decimales infinitos no periódicos.

6. Números Imaginarios (I)

Los números **imaginarios** son una extensión del sistema numérico real que nos permiten resolver ecuaciones que no tienen solución con los números reales. El ejemplo clásico es :
 $\mathbf{x^2 = -1}$ (x elevado al cuadrado es igual a menos 1)

Esta ecuación no tiene solución real, porque ningún número real elevado al cuadrado da un resultado negativo.

¿Qué es la unidad imaginaria?"

Se define una nueva unidad llamada :
 i = Raiz cuadrada de √- 1 ,

 Entonces, usando esta definición :
 $\mathbf{i^2 = -1}$**"**

A partir de esta unidad imaginaria, podemos construir otros números imaginarios como :
 2i, -5i, 3/4i"

7. Números Complejos (ℂ)

Los números imaginarios no están solos. Se combinan con los reales para formar los números complejos, que tienen esta forma :
 z = a + bi

Donde:
 '**a**' es la parte real y
 '**bi**' es la parte imaginaria.

Ejemplos : $3 + 2i$, $-1 - 4i$, $0 + i$ (solo imaginario), $5 + 0i$ (solo real)

Operaciones básicas con imaginarios

Suma y resta:
$(3 + 2i) + (1 + 4i) = (3 + 1) + (2i + 4i) = 4 + 6i$

Multiplicación:
$(2 + 3i)\ (1 + 4i) = 2(1) + 2(4i) + (3i)\ 1 + (3i)\ 4i =$
$2 + 8i + 3i + 12i ** 2 = 2 + 11i + 12 (-1) = -10 + 11i$"

Conjugado :
El conjugado de $a + bi$ es $a - bi$"

Módulo:
El módulo (Mod) o valor absoluto de $|a + bi|$ es $|a + bi| = \sqrt{|a^2 + b^2|}$"

8. Números Romanos

Los números romanos son un sistema de numeración antiguo que se originó en Roma y todavía se usa hoy en día en ciertos contextos como relojes, capítulos de libros, siglos, nombres de reyes/papas (Carlos V, Juan Pablo II), etc.

Símbolos básicos :

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000

Reglas para formar números romanos :

Repetición: Se pueden repetir hasta tres veces seguidas.
III = 3 , XXX = 30 , CCC = 300

Suma (cuando un número menor va después de uno mayor):
VI = 5 + 1 = 6, XV = 10 + 5 = 15, LX = 50 + 10 = 60

Resta (cuando un número menor va antes de uno mayor):
IV = 5 - 1 = 4, IX = 10 - 1 = 9, XL = 50 - 10 = 40, CM = 1000 - 100 = 900

Lo que NO se debe hacer:
No se repite un símbolo más de tres veces seguidas.
(En lugar de IIII, se escribe IV para el 4). Es decir, 5 - 1 = 4

No existen números romanos para fracciones ni decimales.

NOTA: Al abrir este documento tambien se abrió el programa «**NÚMEROS ROMANOS Simulador.exe**» que ayuda a comprender de manera práctica la construcción de los números romanos. Solo basta dar **click** en las flechas de los controles **M**, **C**, **D**, **U**. La flecha hacia arriba incrementa el valor mientras que la flecha hacia abajo lo decrementa.

9. Número Pi (π)

El número pi (**π**) es una constante matemática que representa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Es un número irracional, lo que significa que no puede expresarse como una fracción exacta y sus decimales no terminan ni se repiten.

Valor aproximado de **π** (Pi):

π ≈ 3.1416 (usado comúnmente en cálculos básicos).
Los primeros decimales de **π** (Pi) son: **π** = 3.1415926535...

¿Para qué sirve π (Pi)?"

Se utiliza en muchas áreas de las matemáticas, física e ingeniería, especialmente en:

Geometría:
Longitud de una circunferencia: **$L = 2\pi r$**
Área de un círculo : **$A = \pi r^2$**

Trigonometría y ondas (como sonido, luz, electricidad).

Estadística (en la distribución normal).

Construcción, diseño, y programación.

10. Número e

El número 'e' es otra constante matemática fundamental, al igual que π, pero relacionada principalmente con el crecimiento exponencial, logaritmos y cálculo.

¿Qué es el número 'e'?

Su valor aproximado es : e ≈ 2.718281828459045...

Es un número irracional (sus decimales no terminan ni se repiten) y también trascendental (no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales).

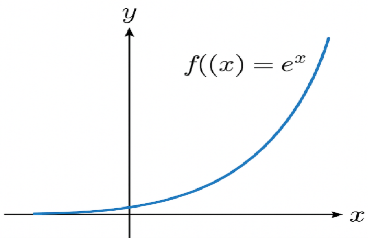
¿Dónde se usa 'e'?

El número 'e' aparece en muchos contextos, especialmente cuando hay crecimiento o decaimiento continuo, como :

Intereses compuestos continuamente en finanzas , Crecimiento de poblaciones , Procesos radiactivos , Cálculo diferencial e integral , Funciones exponenciales y logarítmicas.

Fórmula típica con e :

1. Función exponencial :



2. Interés compuesto continuamente :

$$A = P\, e^{rt}$$

Donde:
A = cantidad final.
P = cantidad inicial.
r = tasa de interes.
t = tiempo en años.

¿Cómo se define e?

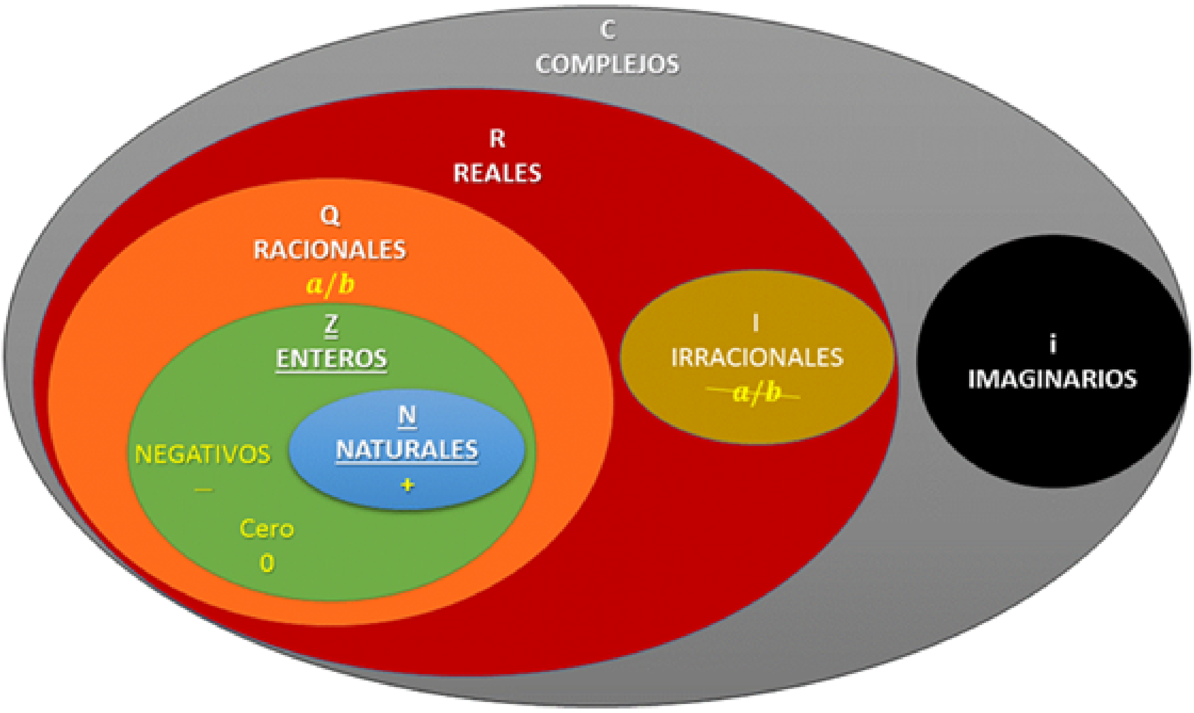
Como un límite:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Como una serie infinita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$



La Recta Numérica

La **recta numérica** es una **línea recta infinita** sobre la cual se representan todos los números reales de manera ordenada.

Cada punto de la recta corresponde a un número real, y **cada número tiene un único lugar** en ella.

Elementos principales

1. Origen (0):

Es el punto central de referencia. A partir de él:

Hacia la **derecha** se colocan los números **positivos**.
Hacia la **izquierda** se colocan los números **negativos**.

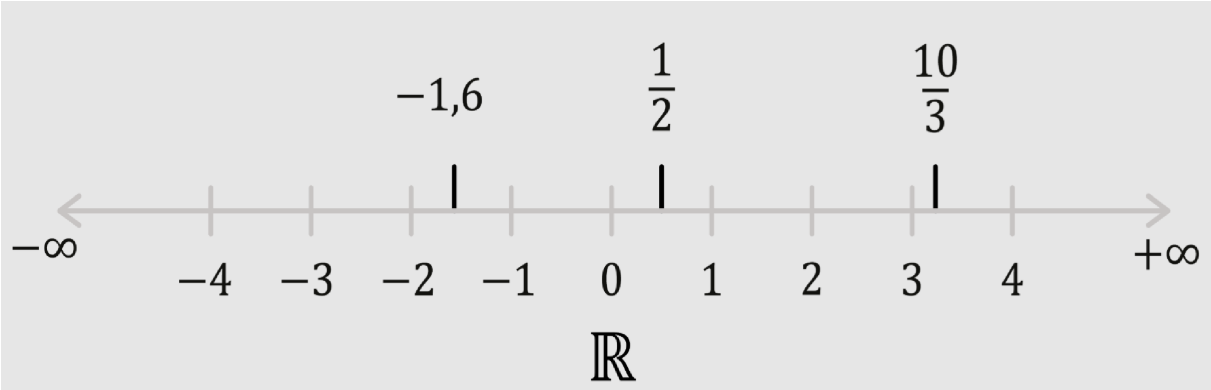
2. Unidades:

La distancia entre cada número consecutivo (por ejemplo, entre 0 y 1, o entre 1 y 2) representa una **unidad de medida constante**.

3. Dirección:

A la derecha → valores **mayores**.
A la izquierda → valores **menores**.

Representación gráfica básica



Observa que:

Los números **negativos** están a la izquierda del 0.
Los **positivos** a la derecha.
El 0 **no es ni positivo ni negativo**.

Interpretación de posiciones

A mayor número, más a la **derecha** se encuentra.
A menor número, más a la **izquierda**.

Ejemplo:

−2 < 1 porque -2 está a la izquierda de 1.

Extensión de la recta numérica

La recta numérica **no tiene límites**:

Se extiende infinitamente hacia la derecha (+∞) y hacia la izquierda (−∞).
Por eso se dice que representa **todos los números reales ($\mathbb{R}$)**:

R={todos los números positivos, negativos, fraccionarios e irracionales}

Uso de la recta numérica

La recta numérica se usa para:

Comparar números.
Representar operaciones (sumas y restas).
Visualizar desigualdades.
Estudiar valor absoluto y distancia entre puntos.