

Series de Fourier

1. ¿Qué problema intentaba resolver Fourier?

Fourier se preguntó:

¿Podemos construir cualquier señal periódica usando solo ondas senoidales?

Sorprendentemente la respuesta es **sí**.

Eso significa que formas muy distintas como:

Onda cuadrada

Onda triangular

Onda diente de sierra

Señales de audio

Vibraciones mecánicas

todas se pueden construir sumando puros **senos** y **cosenos**.

2. ¿Por qué senos y cosenos?

Porque son **ondas perfectas**, suaves, repetitivas y muy fáciles de manejar.

Además:

Se repiten exactamente.

Puedes cambiarles frecuencia, amplitud y fase.

Son predecibles y limpias.

La electricidad y el sonido se comportan naturalmente como ondas.

Fourier descubrió que estas ondas son como **bloques de construcción**, igual que los ladrillos para hacer una casa.

3. La idea intuitiva

Imagínate que tienes la forma de una onda cuadrada y quieres recrearla.

Lo haces sumando muchas ondas suaves:

Primero agregas una senoide grande:

→ se parece un poco

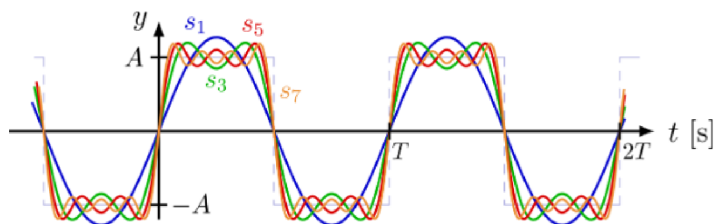
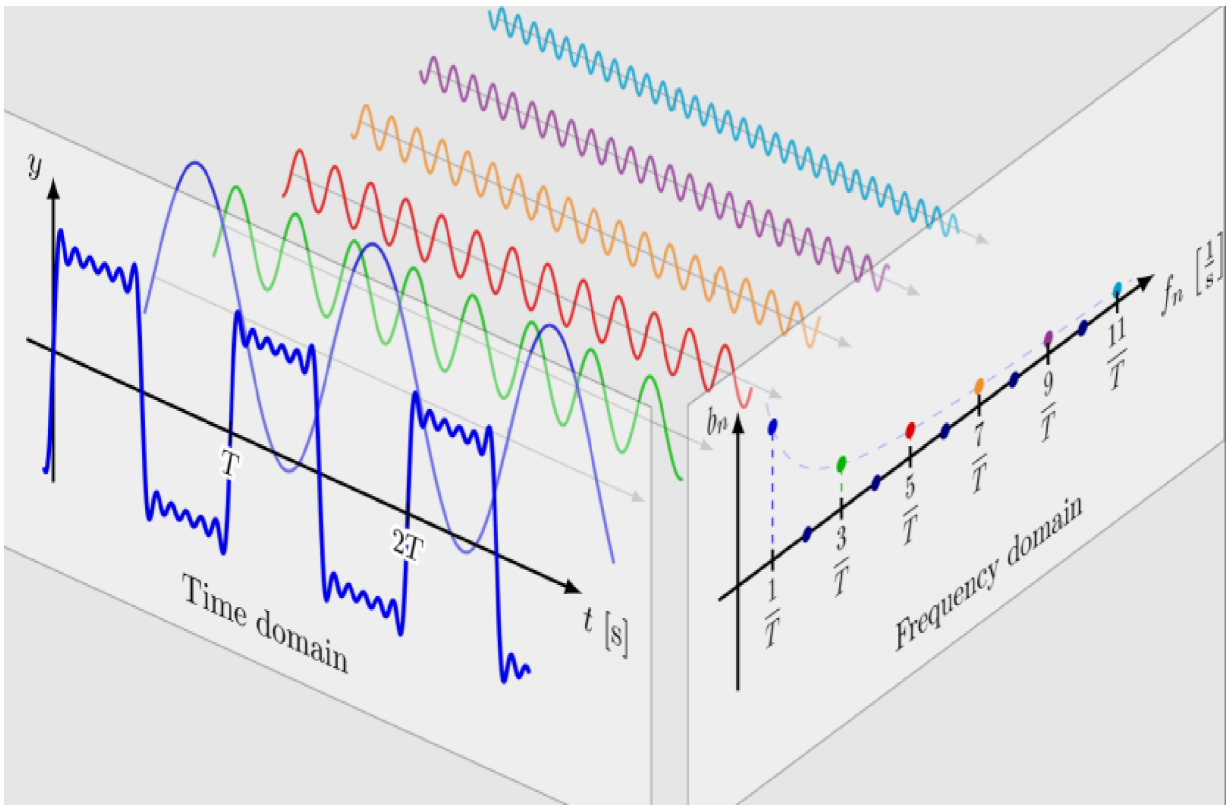
Luego añades otra más rápida:

→ se parece más

Y luego otra...

Y otra...

Cada nueva onda mejora el dibujo completo y, sumándolas todas, **reconstruyen la señal exacta**.



4. ¿Qué es una Serie de Fourier?

Es simplemente una **suma de ondas senoidales** (senos y cosenos) con diferentes:

amplitudes
frecuencias (armónicos)
direcciones de giro (fase)

Se escribe así:

$$\text{Señal} = (\text{seno fundamental}) + (\text{seno armónico 2}) + (\text{seno armónico 3}) + \dots$$

Una Serie de Fourier es una receta que dice cuánto de cada onda necesitas para construir la señal.

5. ¿Qué son los armónicos?

La frecuencia principal se llama **fundamental**.
Las demás son múltiplos enteros:

1f → fundamental
2f → segundo armónico
3f → tercer armónico
4f → cuarto armónico
...

Son como “copias” de la onda original pero más rápidas.

6. ¿Por qué las señales tienen armónicos?

Porque las señales reales NO son ondas perfectas.
Una onda cuadrada tiene cambios bruscos, y esos cambios requieren ondas rápidas (armónicos altos) para reproducirse correctamente.

Entre más puntos “agudos” tenga una forma, más armónicos necesita.

7. ¿Qué representa cada parte de la Serie?

A_0 → componente constante (DC)
 A_n → cuánto coseno necesita la señal
 B_n → cuánto seno necesita la señal

Como si fueran **ingredientes de una receta**.

8. ¿Qué importancia tiene en la vida real?

Las Series de Fourier son la base de:

análisis de señales
ingeniería de audio
compresión de imágenes JPEG
análisis de vibraciones
telecomunicaciones
electrónica
instrumentación científica

Casi toda la tecnología moderna usa Fourier en alguna forma.

La magia práctica de pasar al dominio de la frecuencia

Cuando conviertes una señal al dominio de la frecuencia (con Serie, Transformada, DFT o FFT), ocurre algo muy poderoso:

Una señal complicada se convierte en una lista ordenada de frecuencias.

Imagina que tienes una onda cuadrada, una señal de audio, una vibración, o cualquier cosa compleja.

En el tiempo es difícil manipularla.

Pero en la frecuencia es simplemente:

En frecuencia puedes eliminar componentes como si fueran piezas sueltas

En el tiempo:

Intentar “borrar una frecuencia” es casi imposible.

En frecuencia:

solo pones en cero el componente que no quieres.

Sí, así de simple.

Ejemplos reales:

Eliminar un zumbido de 60 Hz en una grabación de audio

→ basta con poner en cero el bin de 60 Hz en el espectro FFT.

Quitar armónicos molestos en una onda cuadrada

→ dejas el fundamental, eliminas el 3f, 5f, etc., según lo que quieras suavizar.

Filtrar ruido de alta frecuencia

→ en el espectro lo ves claramente y lo recortas.

Limpiar vibraciones en maquinaria

→ basta eliminar los picos que corresponden a resonancias indeseadas.

Y lo más importante: después puedes regresar al tiempo “sin esas frecuencias”

Con:

Serie de Fourier → sumas todo excepto los armónicos eliminados

Transformada inversa → integras sin esos componentes

Inversa FFT → reconstruyes la señal digital limpia

Resultado:

La señal vuelve al tiempo **pero sin los componentes eliminados.**

Esto es esencial en:

ecualizadores

filtros digitales

cancelación de ruido

comunicaciones

análisis estructural

procesamiento de imágenes (JPEG es Fourier 2D)

Ejemplo: Señal modulada → eliminar la portadora → recuperar la información útil

1. ¿Qué es una señal modulada?

En AM (amplitud modulada), la señal útil (voz o datos) se “monta” sobre una onda portadora de alta frecuencia.

Ejemplo simple:

$$s(t) = [1 + m(t)] \cos(\omega ct)$$

donde:

$m(t)$ = la **información real**

$\cos(\omega ct)$ = la **portadora**

ωc = frecuencia muy alta

En el tiempo se ve como una “montaña” oscilando rápido.

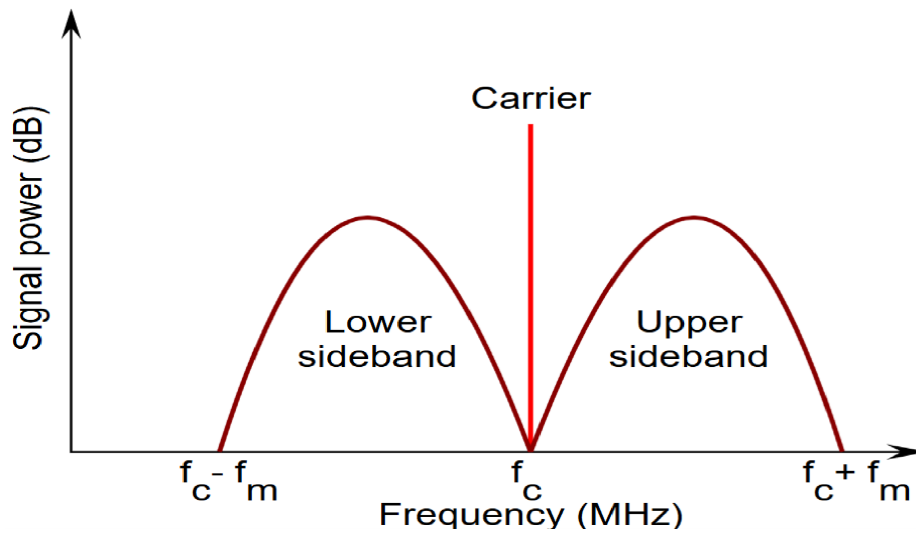
Difícil separar la información solo mirando la forma.

2. ¿Qué pasa si transformas esta señal a frecuencia?

En la frecuencia aparecen **tres picos**:

uno en la portadora (frecuencia alta)

dos a los lados (bandas laterales), que contienen la **información real**



En el espectro se ve **clarito**:

La portadora = un pico enorme en f_c

La información útil = picos más pequeños a $f_c \pm f_m$

3. ¿Qué hace un demodulador inteligente?

En frecuencia elimina el pico de la portadora.

(pone ese valor en cero)

La operación es trivial:

$$X[f_c] = 0$$

Eso es todo.

4. ¿Y luego qué?

Aplicamos la transformada inversa:

$$x(t) = \text{IFFT}\{X(f)\}$$

El resultado en el tiempo es:

una señal sin portadora

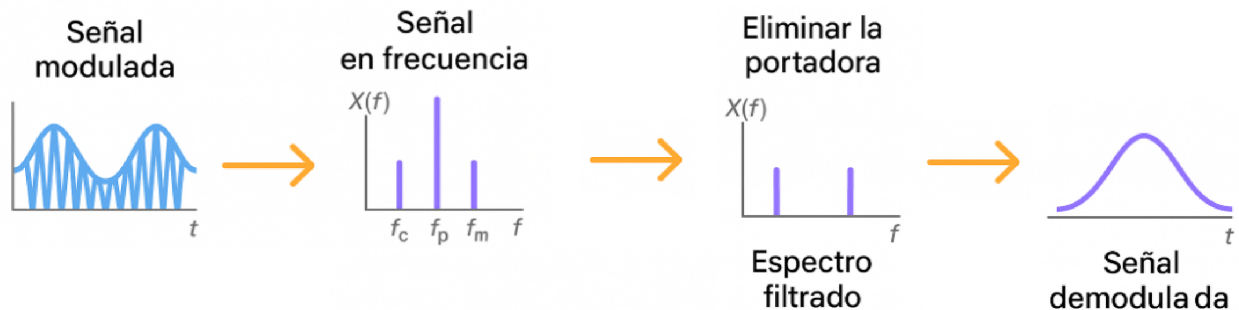
solo queda la información $m(t)$.

5. ¿Por qué funciona tan bien?

Porque en el **dominio del tiempo** la portadora está mezclada con la señal útil.

No hay forma de "borrarla" directamente sin destruir la información.

En cambio, en **frecuencia**:
 la portadora es un pico aislado
 el mensaje está a sus lados
 separarlos es tan fácil como borrar una línea



Ejemplo Completo con Fórmulas y Cálculos

1. Definimos la señal modulada

Tomemos un caso sencillo de AM:

$$m(t) = \cos(2\pi f_m t)$$

$$s(t) = (1 + m(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

Usaremos valores específicos:

Frecuencia del mensaje: $f_m = 100 \text{ Hz}$

Frecuencia de la portadora: $f_c = 1000 \text{ Hz}$

Entonces:

$$m(t) = \cos(200\pi t)$$

$$s(t) = (1 + \cos(200\pi t)) \cos(2000\pi t)$$

Expresémosla:

$$s(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(200\pi t) \cos(2000\pi t)$$

2. Aplicamos identidad trigonométrica

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

Entonces:

$$s(t) = \cos(2000\pi t) + \frac{1}{2} \cos(2200\pi t) + \frac{1}{2} \cos(1800\pi t)$$

Sustituyendo frecuencias:

1000 Hz

$1000 + 100 = 1100$ Hz

$1000 - 100 = 900$ Hz

La señal queda:

$$s(t) = \cos(2\pi \cdot 1000 t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 1100 t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 900 t)$$

3. Espectro de la señal (Serie / Transformada)

El espectro tiene:

un pico en **1000 Hz** (portadora)

un pico en **1100 Hz** (banda lateral superior)

un pico en **900 Hz** (banda lateral inferior)

Lo escribimos como suma de deltas:

$$S(f) = \delta(f - 1000) + \frac{1}{2} \delta(f - 1100) + \frac{1}{2} \delta(f - 900)$$

Simétrico en negativo también, pero omitimos para claridad.

4. Eliminamos la portadora

En frecuencia, simplemente hacemos:

$$S(f) \leftarrow S(f) \text{ con } \delta(f - 1000) = 0$$

El nuevo espectro:

$$S_{\text{filtrado}}(f) = \frac{1}{2} \delta(f - 1100) + \frac{1}{2} \delta(f - 900)$$

5. Transformada inversa (IFFT / Serie inversa)

Aplicamos:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{\text{filtrado}}(f)\}$$

Transformada inversa de una delta:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(f - f_0)\} = \cos(2\pi f_0 t)$$

Entonces:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 1100t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 900t)$$

Factorizamos:

$$x(t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_c + f_m)t) + \cos(2\pi(f_c - f_m)t)]$$

Usamos la identidad inversa:

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

Entonces:

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_m t)$$

6. Para obtener la señal del mensaje, multiplicamos por la portadora

Para demodular:

$$m(t) = x(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t)$$

$$m(t) = 2 \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_m t)$$

$$m(t) = \cos^2(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_m t)$$

Usando:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$$

Resultado:

$$m(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_m t) + \frac{1}{2} \cos(2\pi(2f_c)t) \cos(2\pi f_m t)$$

Luego se pasa por un **filtro pasa-bajos**, eliminando el término de alta frecuencia.

Resultado final:

$$m(t) = \cos(2\pi f_m t)$$

La **información original** ha sido recuperada.

Qué hace la transformada inversa de Fourier?

Imagina que tienes una señal cualquiera: audio, vibración, una onda cuadrada, una señal modulada, etc.

Cuando la pasas al dominio de la frecuencia (con la FFT), lo que obtienes es:

una lista de **frecuencias**
cuánta **fuerza** tiene cada una
y la **fase** (cómo empiezan en el tiempo)

Eso es tu **espectro**.

La **transformada inversa** hace esto:

Toma todas esas frecuencias, con su fuerza y fase, y las vuelve a sumar para reconstruir la señal original en el tiempo.

NADA más.

No estás integrando. No estás haciendo cosas "raras".

Estás literalmente **sumando ondas**.

El secreto que simplifica toda la comprensión

Ejemplo:

“Pon una onda de 100 Hz con fuerza 3”

“Pon otra de 300 Hz con fuerza 1”

“Pon otra de 500 Hz con fuerza 0.2”

súmalas...

¡y aparece la señal!

¿Por qué aparece una integral en los libros?

Porque cuando hay **infinitas frecuencias posibles**, en vez de sumar una por una, se usa una integral. Pero la idea sigue siendo EXACTAMENTE la misma:

sumar ondas

sumar ondas

sumar ondas

Eso es todo.

No necesitas entender el símbolo de integral para entender qué hace.

El símbolo es solo una forma compacta de escribir:

“Suma todas las frecuencias posibles desde muy bajas hasta muy altas.”

Transformada Inversa de Fourier (explicación simple)

Cuando una señal se transforma al dominio de la frecuencia, obtenemos una lista que indica cuánta "presencia" tiene cada frecuencia dentro de la señal.

La transformada inversa toma esa lista y reconstruye la señal original sumando todas esas frecuencias (cada una con su intensidad y su fase).

No hace nada misterioso: simplemente vuelve a juntar todas las ondas que componen la señal.

Definición de Función PAR o IMPAR

¿qué es una función par en palabras simples?

Una función **par** es una que se ve igual del lado izquierdo y derecho del eje vertical.

Ejemplos muy visuales:

una montaña simétrica
una U
un coseno

Si se ve igual de los dos lados → no necesita ondas que produzcan "desbalance".

Las ondas que son "simétricas" naturalmente son los **cosenos**.

Por eso:
las funciones pares solo usan cosenos en Fourier.

¿qué es una función impar en palabras simples?

Una función **impar** es una que al voltear la gráfica 180° sobre el origen queda igual.

Ejemplo muy visual:

una S centrada
una rampa que sube a la derecha y baja igual a la izquierda
un seno

Las ondas seno tienen ese tipo de simetría de giro.

Por eso:
las funciones impares solo usan senos en Fourier.

Y si tu función no tiene ninguna simetría...

Entonces necesitas **seno + coseno** porque nada te ayuda a simplificar.

Ahora sí: por qué las 3 fórmulas de Fourier existen

Las 3 fórmulas NO salieron por arte de magia.

Salen porque Fourier dijo:

“Si es par \rightarrow solo cosenos”

“Si es impar \rightarrow solo senos”

“Si no es nada \rightarrow necesitas ambos”

Entonces:

Fórmula general (seno + coseno)

Es la fórmula que sirve para cualquier señal.

Fórmula solo cosenos

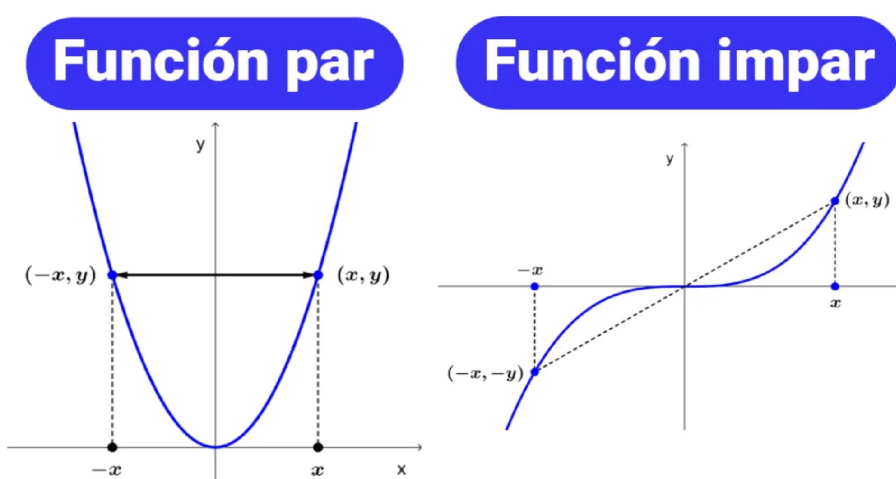
Se obtiene al darse cuenta:

“Si la señal es par, todos los senos sobran.”

Fórmula solo senos

Se obtiene igual:

“Si la señal es impar, todos los cosenos sobran.”



par: $f(-x) = f(x)$

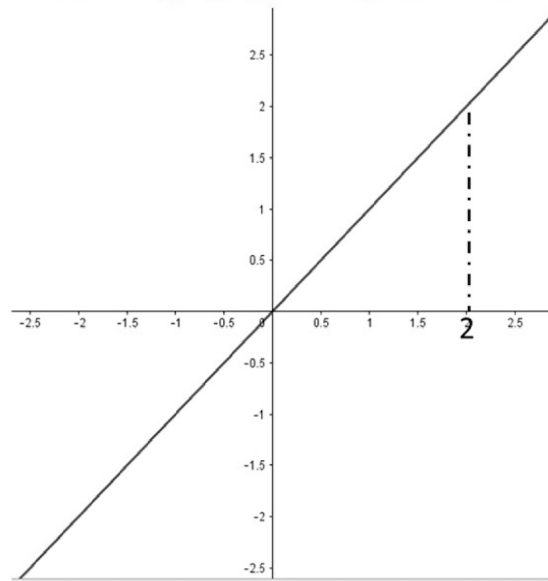
impar: $f(-x) = -f(x)$

$f(x) = x$

Función par
 $f(-x) = f(x)$

Función impar
 $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = -x$



Simetrías y Coeficientes de La Serie de Fourier

Simetría	Coeficientes		Funciones en la serie
Ninguna	$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$	$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt$	Senos y cosenos
Par	$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$	$b_n = 0$	únicamente cosenos
Impar	$a_n = 0$	$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt$	únicamente senos
media onda	$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt & n \text{ impar} \end{cases}$	$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sen(n\omega_0 t) dt & n \text{ impar} \end{cases}$	Senos y cosenos impares

1) Enfoque Didáctico (Intuitivo y Visual)

¿Qué es una Serie de Fourier?

Es una manera de **descomponer una función** cualquiera (si se repite cada cierto intervalo) en **ondas senoidales y cosenoidales**.

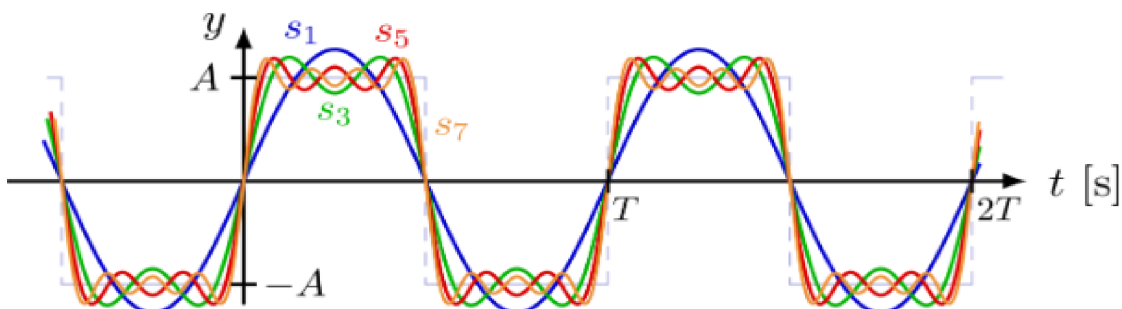
Dicho en forma simple:

Cualquier señal periódica se puede reconstruir como la suma de ondas sinusoidales.



En la figura anterior, se observa que con la suma de varias señales senoidales (y cosenoidales) se puede construir una onda cuadrada. La onda cuadrada de enmedio se ve que tiene algunas ondas seriales que se van aproximando a la forma de onda cuadrada. Finalmente la tercera onda cuadrada ya esta bastante bien definida y contiene mas frecuencias de ondas senoidales.

Esta es la principal idea de las seies de Fourier.



La señal original puede ser:

- una onda cuadrada
- un diente de sierra
- una señal de audio
- una vibración mecánica
- un patrón repetitivo cualquiera

Todas se pueden construir sumando senos y cosenos.

Analogía didáctica

Imagina que quieres construir cualquier color usando **mezclas de rojo, verde y azul**.
Pues Fourier descubrió que puedes construir **cualquier forma periódica** sumando solo:

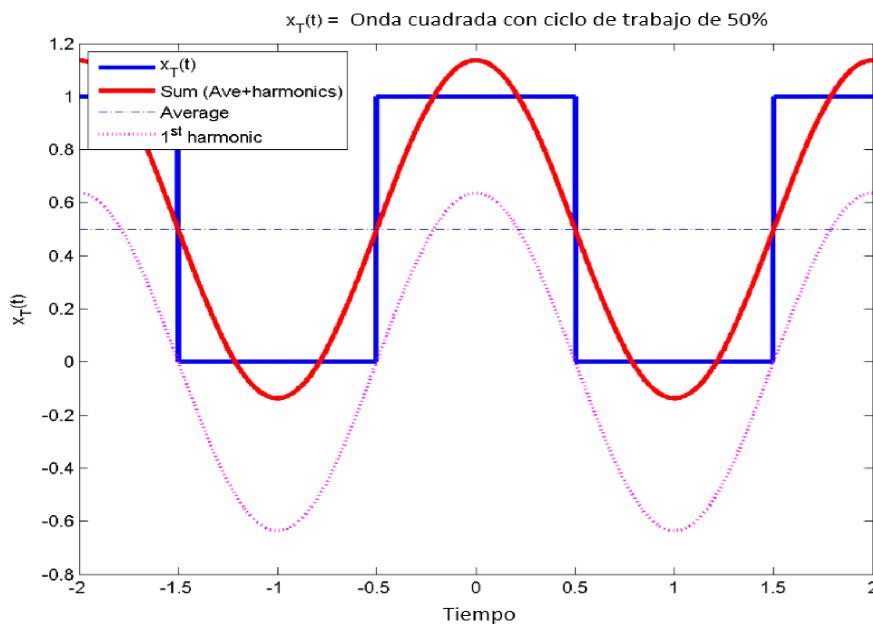
- Senos
- Cosenos
- cada uno con frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental
- cada uno con su peso (coeficiente)

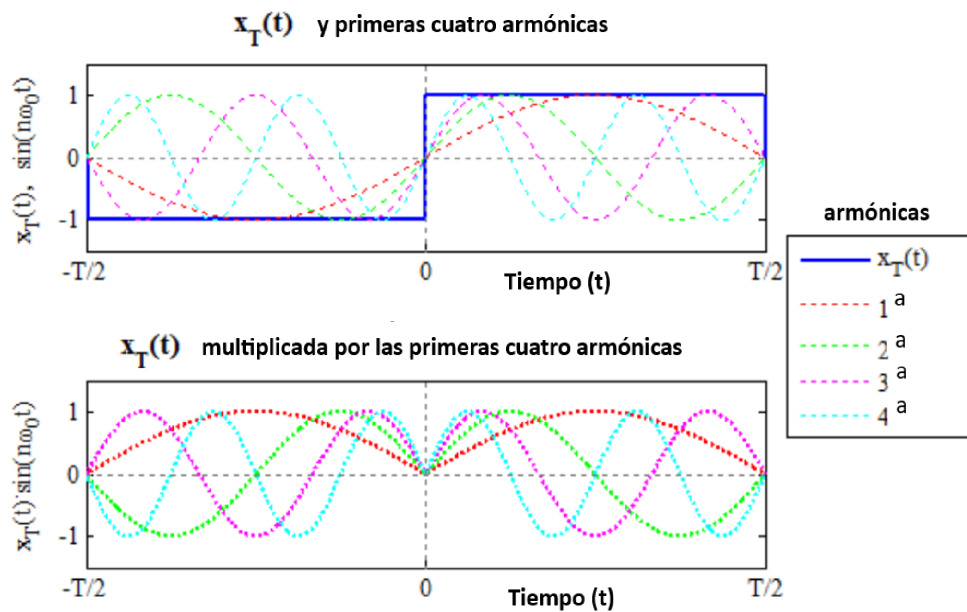
La Serie de Fourier es como una **receta** que te dice cuánto de cada seno y coseno necesitas.

Cómo "piensa" Fourier

- Para Fourier:
- Una señal difícil → es combinación de piezas simples
- Las piezas simples → senos y cosenos
- El proceso → sumar ondas hasta reconstruir la forma original

Un ejemplo clásico:





La fundamental: es la frecuencia básica.

Los armónicos: son múltiplos enteros de la fundamental.

Solo senos impares reconstruyen una onda cuadrada.

La serie nunca termina, pero después de pocos términos la aproximación es sorprendente.

2) Enfoque Matemático (Formal y Completo)

Sea una función periódica de periodo T.

La frecuencia fundamental es:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

La Serie de Fourier se expresa como:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

Cómo se calculan los coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Interpretación matemática

a_0 → componente de **DC** (promedio de la señal)

a_n → peso de cada coseno (parte par)

b_n → peso de cada seno (parte impar)

Esto se debe a que senos y cosenos forman una **base ortogonal**, similar a como los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} forman una base en el espacio 3D.

Ejemplo matemático clásico: onda cuadrada

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Resultado:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

Solo intervienen armónicos **impares** y **solo senos** (función impar).

3) Unión entre lo didáctico y lo matemático

La parte didáctica responde:

por qué los armónicos recrean la señal,
por qué las ondas cuadradas vibran con múltiplos impares,
por qué hace falta seguir sumando términos.

La parte matemática responde **cómo se calculan exactamente** los coeficientes.

Juntas, permiten que:

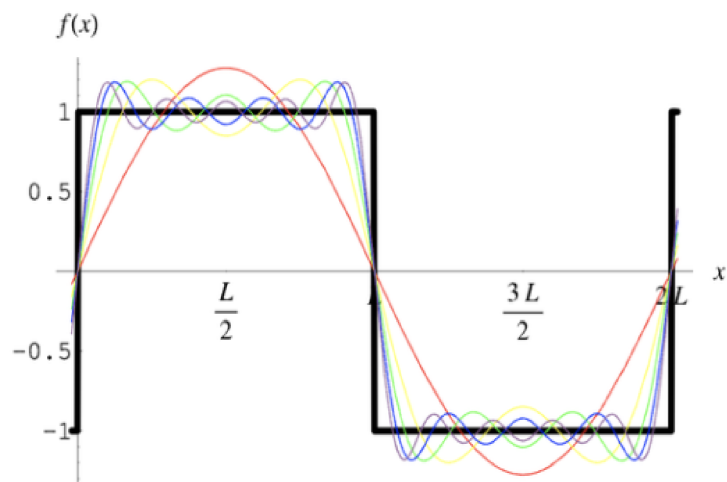
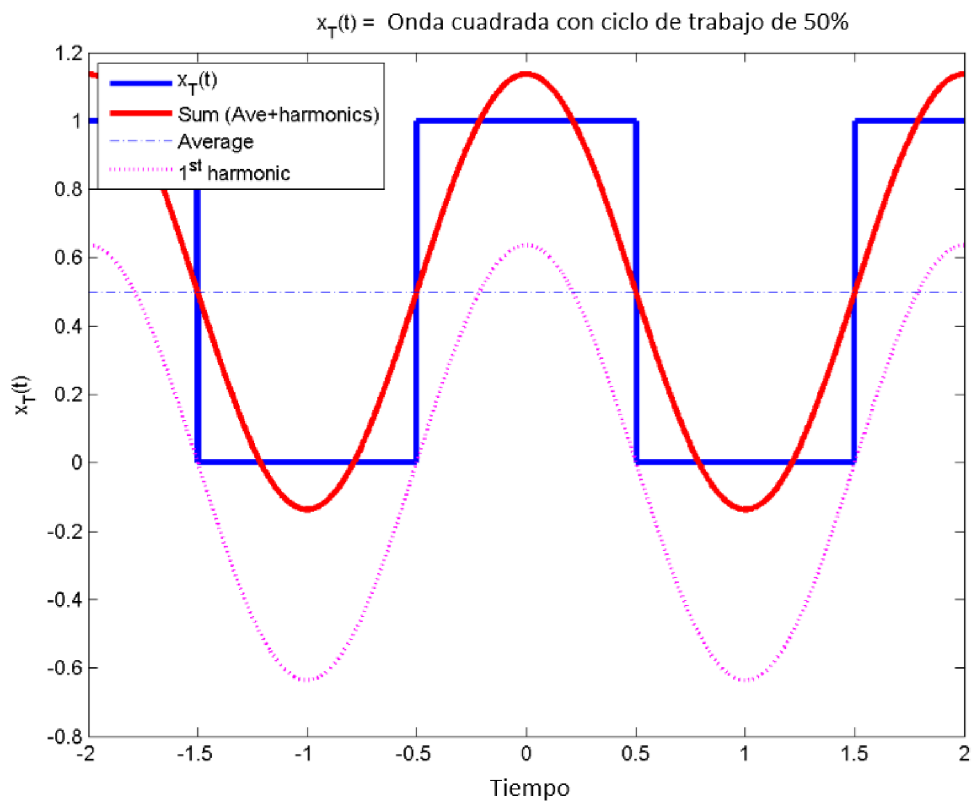
la idea intuitiva (mezcla de ondas)

la construcción formal (integrales y ortogonalidad)

la aplicación en señales, física, electrónica, audio y vibraciones

Ejemplos de Series de Fourier

1) Onda Cuadrada Simétrica



Definición

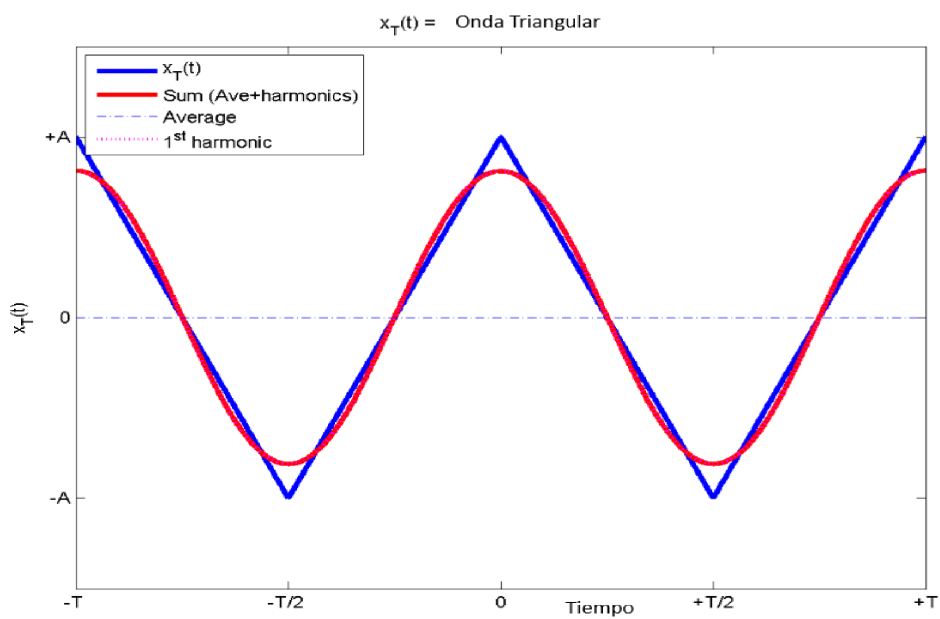
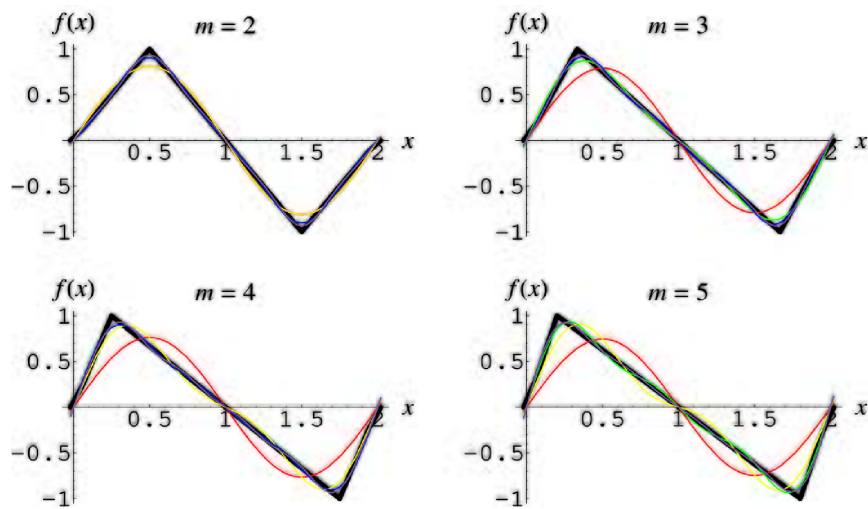
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1, & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Resultado

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

Solo senos, solo armónicos impares.

2) Onda Triangular



Definición

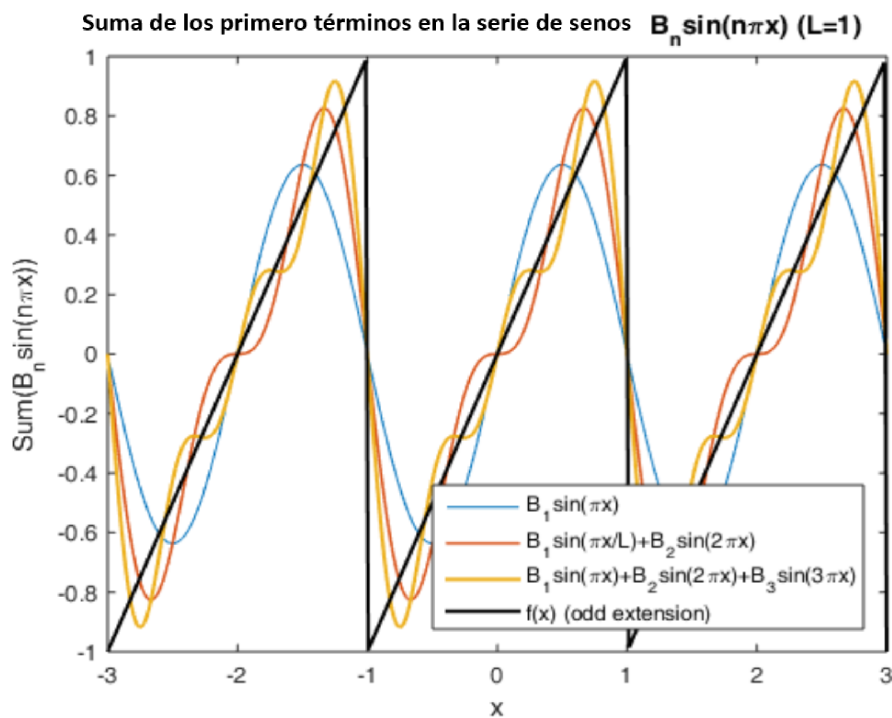
Triángulo centrado, amplitud 1.

Resultado

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{\cos(\omega_0 t)}{1^2} - \frac{\cos(3\omega_0 t)}{3^2} + \frac{\cos(5\omega_0 t)}{5^2} - \dots \right]$$

Solo cosenos, solo impares, amplitud cae como $1/n^2$.

3) Onda Diente de Sierra



Definición

$$f(t) = \frac{2}{T} t - 1, \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

Resultado

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{1} + \frac{\text{sen}(2\omega_0 t)}{2} + \frac{\text{sen}(3\omega_0 t)}{3} + \dots \right]$$

Todos los senos, amplitud $1/n$.

Series de Fourier — Explicación para Principiantes

1. ¿Qué problema intentaba resolver Fourier?

Fourier se preguntó:

¿Podemos construir cualquier señal periódica usando solo ondas senoidales?

Sorprendentemente la respuesta es **sí**.
Eso significa que formas muy distintas como:

Onda cuadrada
Onda triangular
Onda diente de sierra
Señales de audio
Vibraciones mecánicas

todas se pueden construir sumando puros **senos y cosenos**.

2. ¿Por qué senos y cosenos?

Porque son **ondas perfectas**, suaves, repetitivas y muy fáciles de manejar.

Además:

Se repiten exactamente.
Puedes cambiarles frecuencia, amplitud y fase.
Son predecibles y limpias.
La electricidad y el sonido se comportan naturalmente como ondas.

Fourier descubrió que estas ondas son como **bloques de construcción**, igual que los ladrillos para hacer una casa.

3. La idea intuitiva

Imagínate que tienes la forma de una onda cuadrada y quieres recrearla.
Lo haces sumando muchas ondas suaves:

Primero agregas una senoide grande:

→ se parece un poco

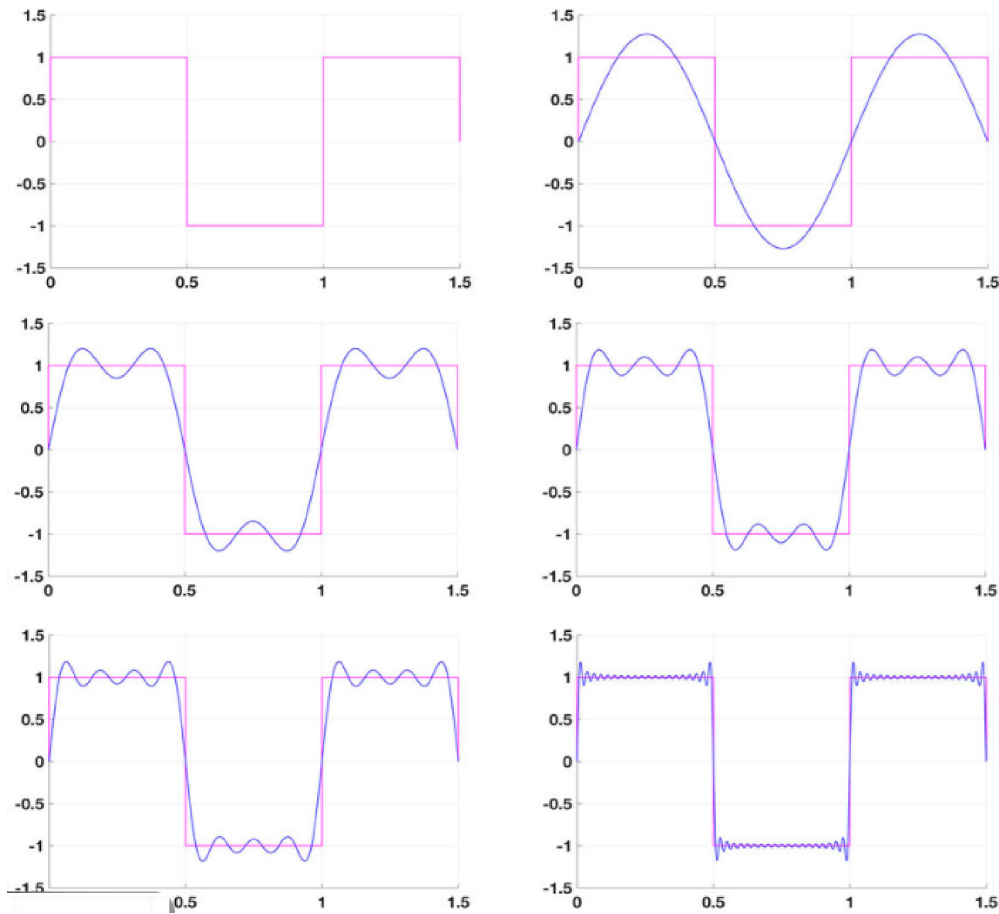
Luego añades otra más rápida:

→ se parece más

Y luego otra...

Y otra...

Cada nueva onda mejora el dibujo completo y, sumándolas todas, **reconstruyen la señal exacta**.



4. ¿Qué es una Serie de Fourier?

Es simplemente una **suma de ondas senoidales** (senos y cosenos) con diferentes:

- amplitudes
- frecuencias (armónicos)
- direcciones de giro (fase)

Se escribe así:

$$\text{Señal} = (\text{seno fundamental}) + (\text{seno armonico 2}) + (\text{seno armonico 3}) + \dots$$

No necesitas las fórmulas todavía, solo la idea:

Una Serie de Fourier es una receta que dice cuánto de cada onda necesitas para construir la señal.

5. ¿Qué son los armónicos?

La frecuencia principal se llama **fundamental**.

Las demás son múltiplos enteros:

$1f \rightarrow$ fundamental

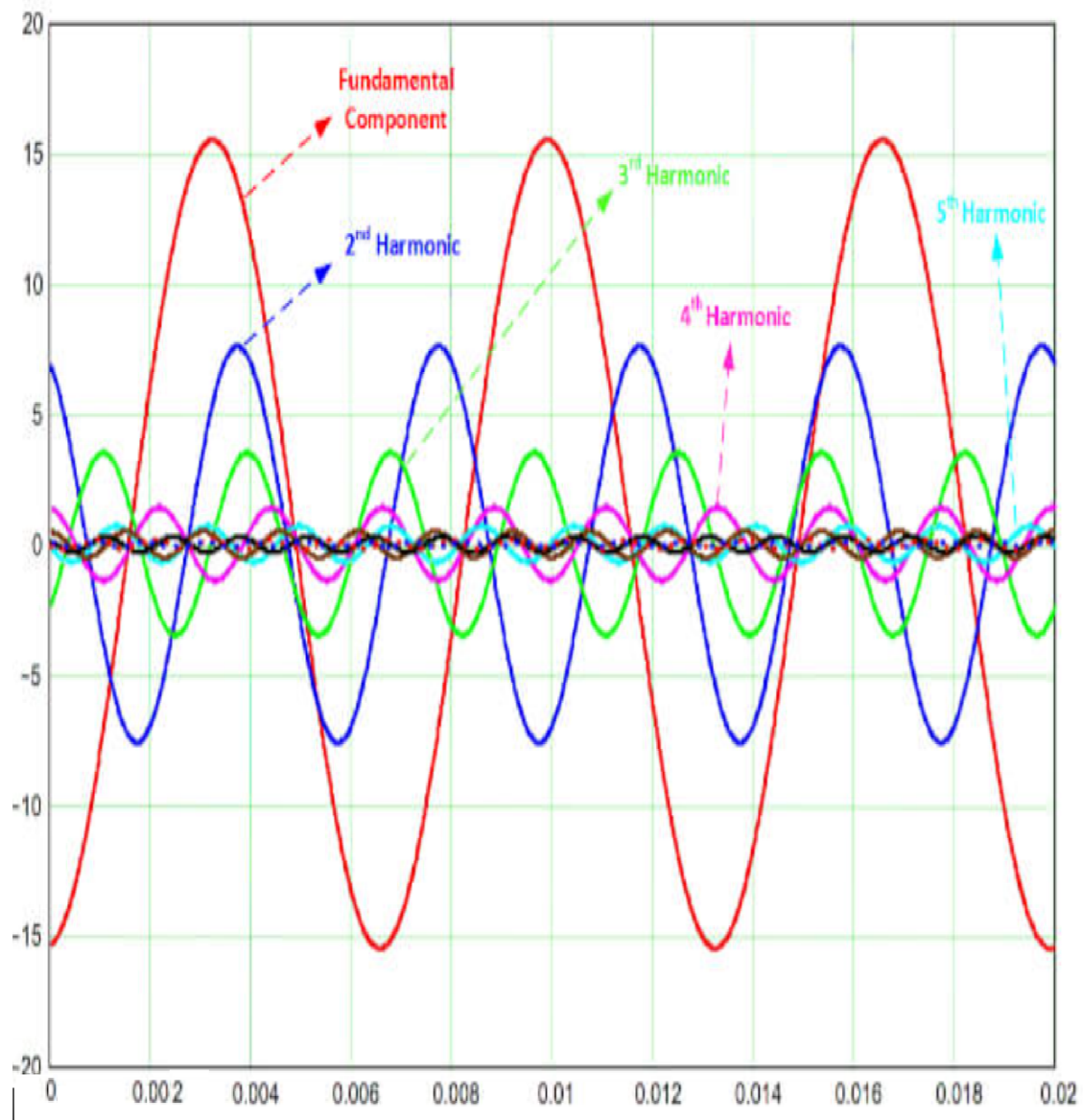
$2f \rightarrow$ segundo armónico

$3f \rightarrow$ tercer armónico

$4f \rightarrow$ cuarto armónico

...

Son como “copias” de la onda original pero más rápidas.



6. ¿Por qué las señales tienen armónicos?

Porque las señales reales NO son ondas perfectas.

Una onda cuadrada tiene cambios bruscos, y esos cambios requieren ondas rápidas (armónicos altos) para reproducirse correctamente.

Entre más puntos “agudos” tenga una forma, más armónicos necesita.

7. ¿Qué representa cada parte de la Serie?

Para principiantes es útil verlo así:

A_0 → componente constante (DC)

A_n → cuánto coseno necesita la señal

B_n → cuánto seno necesita la señal

Como si fueran **ingredientes de una receta**.

8. ¿Qué importancia tiene en la vida real?

Las Series de Fourier son la base de:

análisis de señales
ingeniería de audio
compresión de imágenes JPEG
análisis de vibraciones
telecomunicaciones
electrónica
instrumentación científica

Casi toda la tecnología moderna usa Fourier en alguna forma.

La FFT hace esto:

Tiempo → Frecuencia

(tomas una señal → obtienes sus componentes frecuenciales)

La transformada inversa hace esto:

Frecuencia → Tiempo

(tomas los coeficientes → reconstruyes la señal)

Y la Serie de Fourier hace exactamente lo mismo cuando la señal es **periódica**:

Los coeficientes **an, bn** son la “frecuencia”.

La suma de senos y cosenos es la reconstrucción en el “tiempo”.

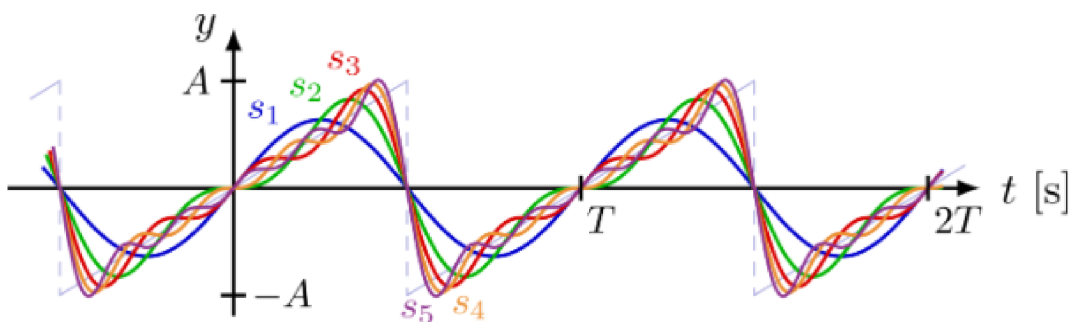
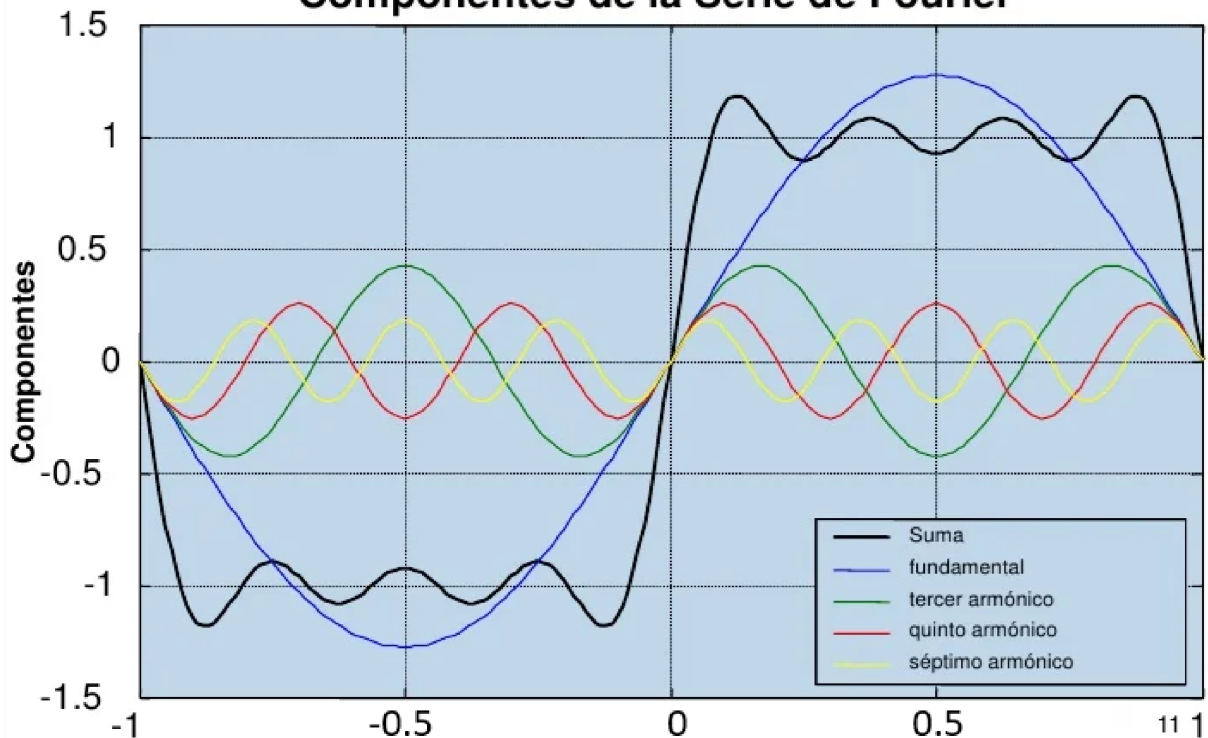
Entonces, la **Serie de Fourier es conceptualmente equivalente a reconstruir la señal a partir de sus componentes**.

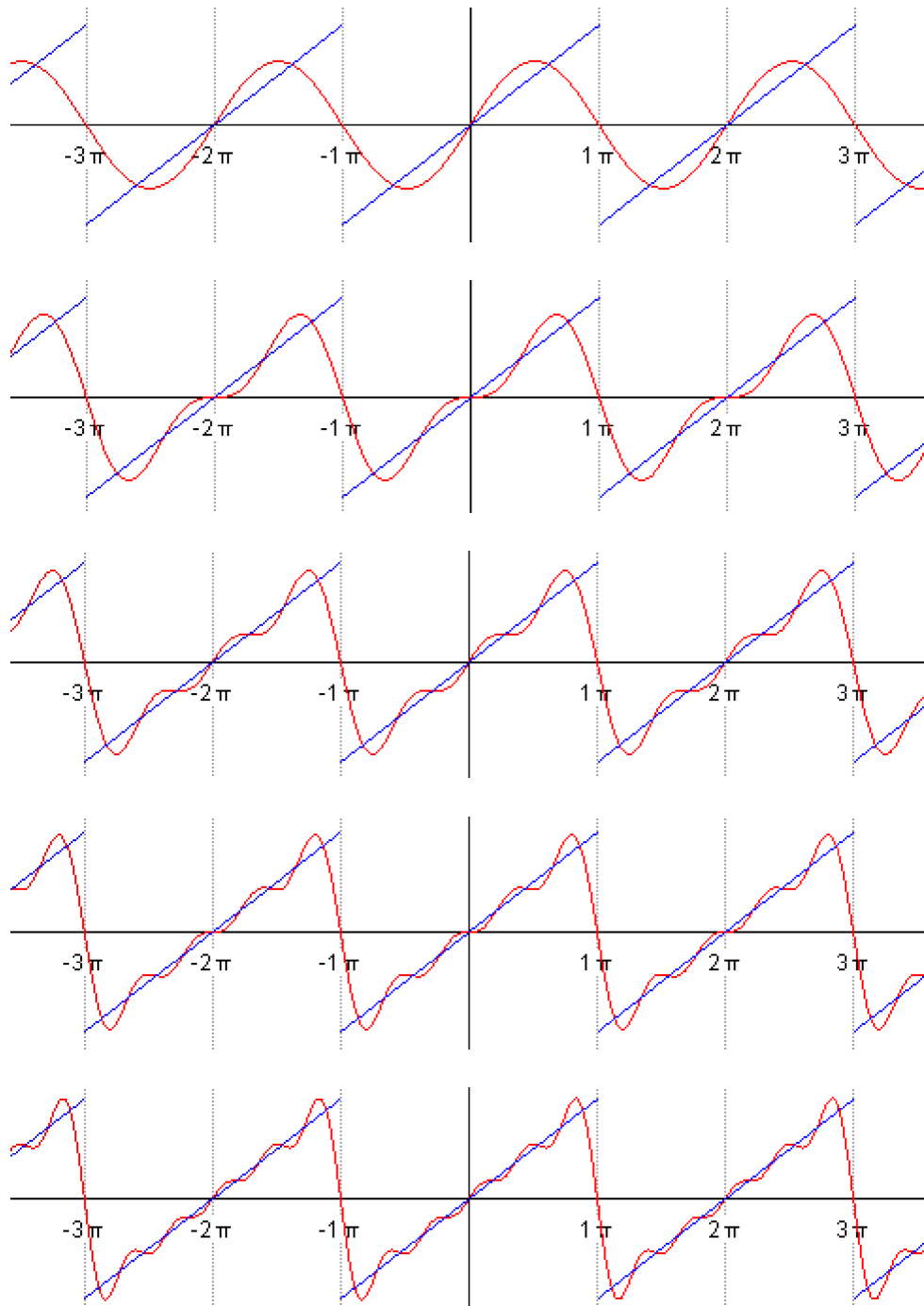
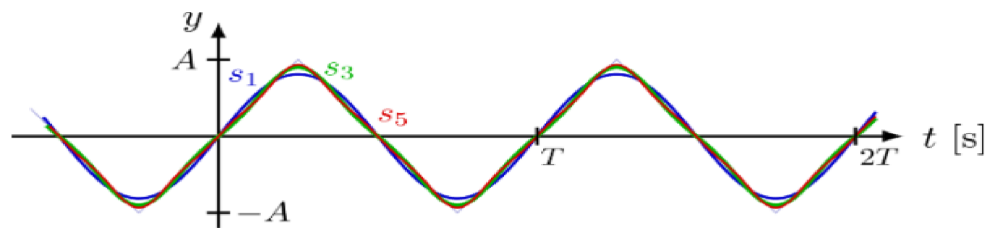
Eso es precisamente lo que hace la **transformada inversa de Fourier**.

“La Serie de Fourier puede interpretarse como la forma discreta y periódica de la transformada inversa de Fourier: toma los coeficientes de frecuencia (armónicos) y reconstruye la señal en el tiempo.”

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \text{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \text{sen}(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

Componentes de la Serie de Fourier





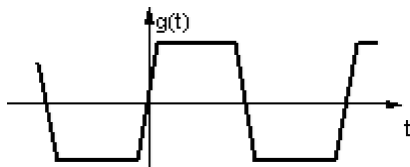
Ejemplos

1. Onda Cuadrada (Simetría Impar)

- **Función:** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$ (Periodo 2π).
- **Análisis:** Función **Impar**. Por lo tanto, $a_0 = 0$ y $a_n = 0$.
- **Coefficientes:** $b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

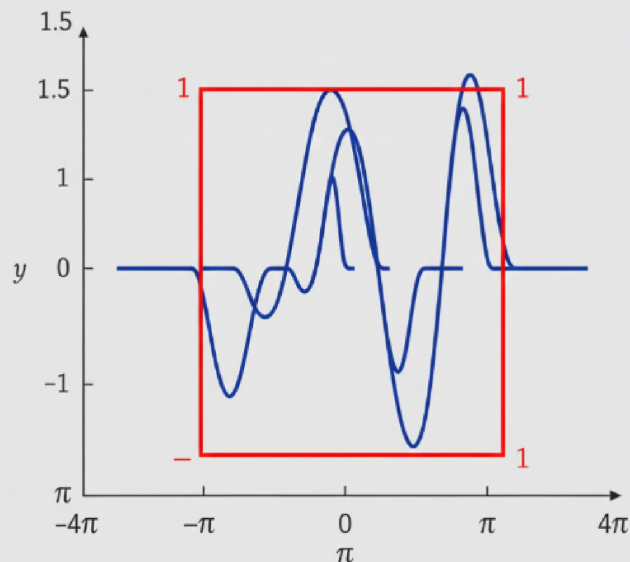
- **Serie:**

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right]$$



SERIE DE FOURIER: ONDA CUADRADA

1. Función Original (Impar)
2. Aproximación con N=5 Términos



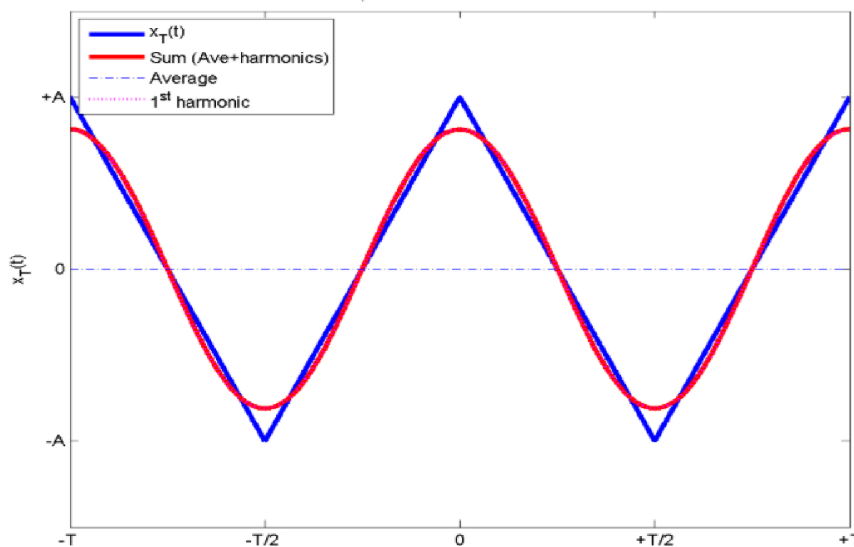
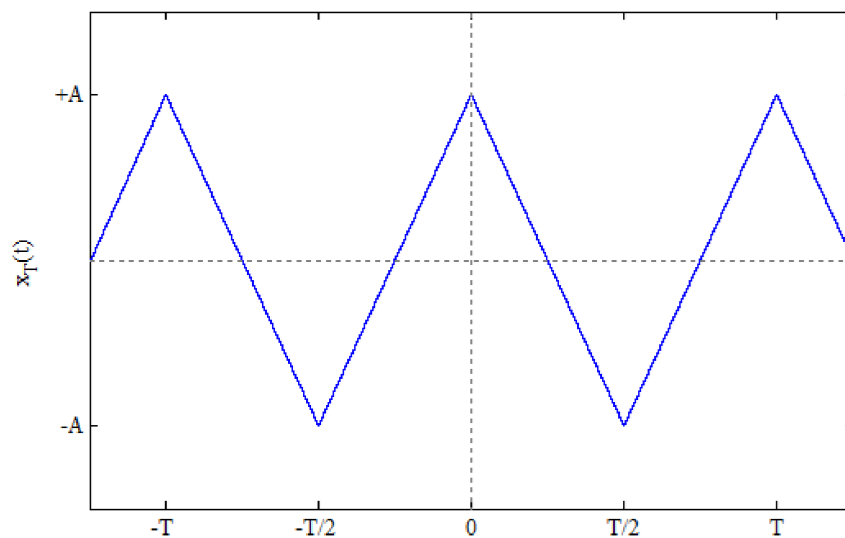
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \approx \sin(x) \left[\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) \right]$$

2. Onda Triangular (Simetría Par) ▲

- **Función:** $f(x) = 1 - \frac{|x|}{\pi}$ para $-\pi \leq x \leq \pi$.
- **Análisis:** Función **Par**. Por lo tanto, $b_n = 0$.
- **Coefficientes:** $a_0 = \frac{1}{2}$. $a_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
- **Serie:**

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left[\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots \right]$$

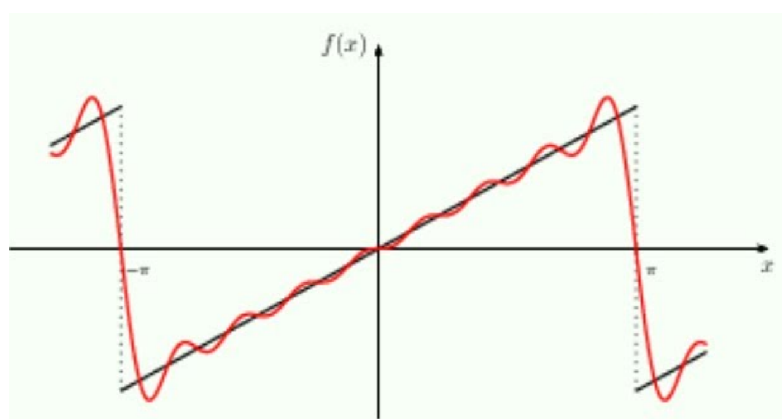
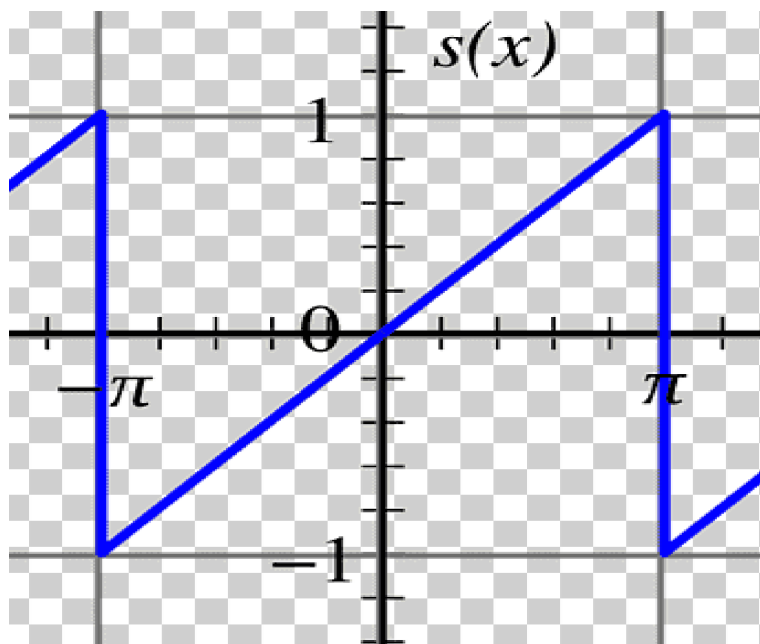
Onda Triangular (Simetría Par) Periodo = T



3. Función Rampa (Simetría Impar Pura)

- **Función:** $f(x) = x$ para $-\pi < x < \pi$.
- **Análisis:** Función **Impar**. Por lo tanto, $a_0 = 0$ y $a_n = 0$.
- **Coefficientes:** $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$.
- **Serie:**

$$f(x) = 2 \left[\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right]$$



4. Función Coseno Cuadrado (Componente DC y Armónico Único)

- **Función:** $f(x) = \cos^2(x)$ (Periodo π , pero usaremos 2π).

- **Análisis:** Función **Par**. La identidad trigonométrica

$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$ resuelve la serie directamente.

- **Coefficientes:** $a_0 = \frac{1}{2}$. $a_2 = \frac{1}{2}$. $a_n = 0$ para $n \neq 2$. $b_n = 0$.

- **Serie:**

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

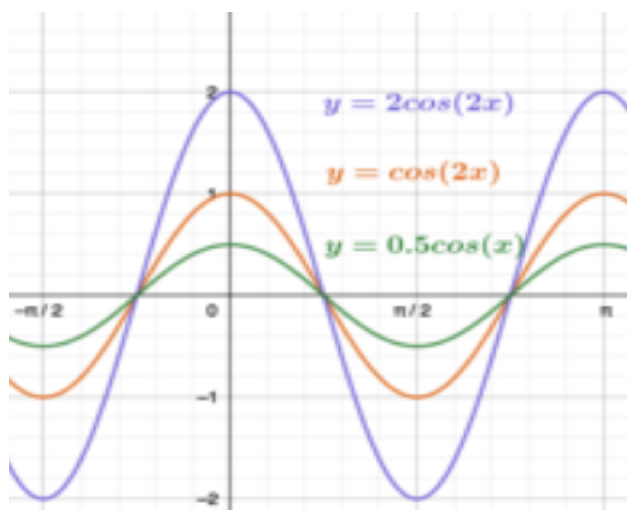
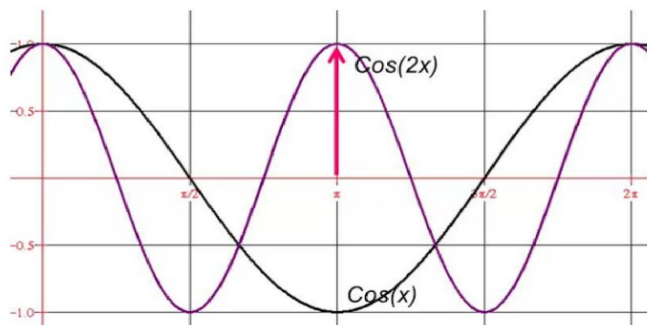
Explicación intuitiva

$\cos(x)$ vibra una vez por periodo.

$\cos^2(x)$ vibra el doble \rightarrow por eso aparece un **$\cos(2x)$** .

Además, como oscila entre 0 y 1, aparece un término **constante 1/2**.

La señal es totalmente reconstruida con solo una frecuencia y una componente DC.



5. Función de Pulso Rectangular (Simetría Par con DC)

- **Función:** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } a < |x| < \pi \end{cases}$ (con $a < \pi$).

- **Análisis:** Función **Par**. Por lo tanto, $b_n = 0$.

Tendrá componente a_0 porque el promedio no es cero.

- **Coefficientes:** $a_0 = \frac{a}{\pi}$. $a_n = \frac{2}{n\pi} \sin(na)$.

- **Serie:**

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} \cos(nx)$$

Donde:

el periodo es 2π ,

la función es **par**,

contiene **componente DC**,

y sólo aparecen **cosenos** en la serie.

¿Por qué es PAR?

La función cumple:

$$f(-x) = f(x)$$

porque el pulso es simétrico respecto del eje vertical.

No hay senos en la serie.

Sólo hay a_0, a_1, a_2, \dots

Fórmula general de Fourier para funciones pares

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

con:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Cálculo del término DC (a_0)

En el intervalo donde $f(x) \neq 0$, solo entre 0 y a:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^a A dx$$

$$a_0 = \frac{2A}{\pi} [x]_0^a$$

$$a_0 = \frac{2Aa}{\pi}$$

La componente DC es:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{Aa}{\pi}$$

Cálculo de los coeficientes a_n

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^a A \cos(nx) dx$$

$$a_n = \frac{2A}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^a$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin(na)$$

Serie de Fourier final

$$f(x) = \frac{Aa}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin(na) \cos(nx)$$

Esta es la **Serie de Fourier completa** de un pulso rectangular PAR.

Interpretación intuitiva (super didáctica)

Como la señal es **par**, solo hay **cosenos**.

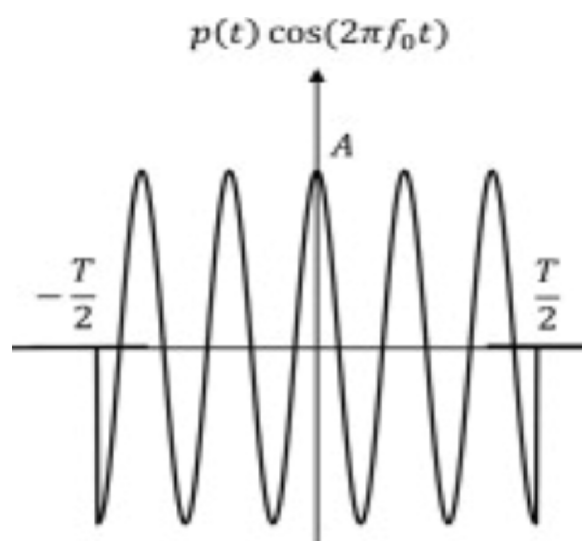
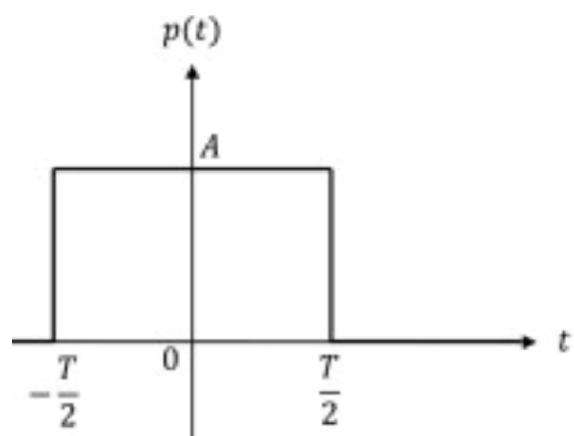
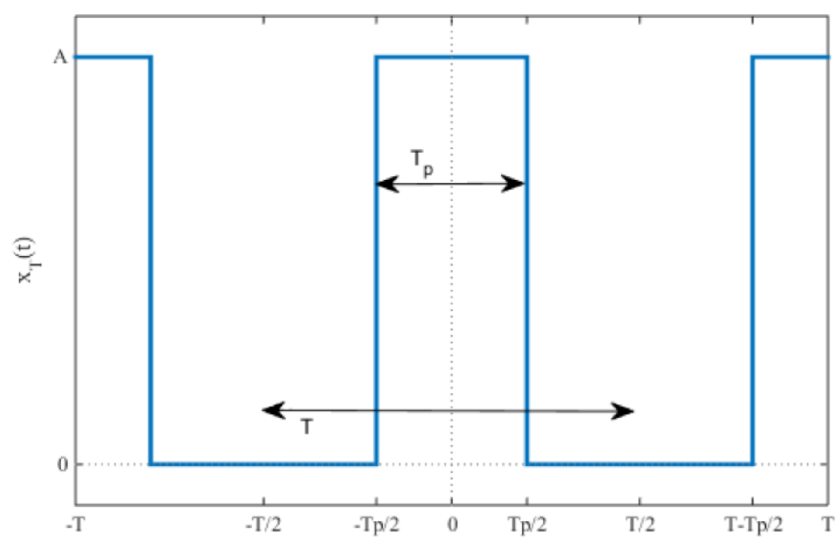
Como tiene **DC**, aparece un **término constante**.

La forma del pulso (subida \rightarrow plano \rightarrow bajada) genera **muchas frecuencias, de amplitud:**

$$(2A / n\pi) \sin(na)$$

Si el pulso es angosto (a pequeño) \rightarrow contiene **altas frecuencias**.

Si el pulso es ancho \rightarrow contiene menos armónicas.



6. Función con Desplazamiento (Caso General)

- **Función:** $f(x) = x + 1$ para $-\pi < x < \pi$.
- **Análisis:** Función **General** (ni par ni impar, pues $f(-x) = -x + 1$, que no es igual a $f(x)$ ni a $-f(x)$). Necesita a_0, a_n, b_n .
- **Descomposición:** $f(x) = 1 + x$.
 - El término **1** contribuye a a_0 .
 - El término x contribuye a b_n (del ejemplo 3).
- **Serie:**

$$f(x) = 1 + 2 \left[\sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \dots \right]$$

¿Es par o impar?

Evalúemos:

$$f(-x) = (-x) + 1$$

Comparar con $f(x) = x + 1$:

No cumple $f(-x) = f(x) \rightarrow$ **NO es par**

No cumple $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ **NO es impar**

Conclusión: es **función general** \rightarrow

su serie de Fourier tiene **senos y cosenos**, además de DC.

Fórmula general de la Serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Coefficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Cálculo del término DC (a_0)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + 1) dx$$

Separar integrales:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} x dx + \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx \right]$$

Primera integral (función impar):

$$\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

Segunda:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

Entonces:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} (0 + 2\pi) = 2$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = 1}$$

Cálculo de a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + 1) \cos(nx) dx$$

Separar:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right]$$

Segunda integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$$

Primera integral:

$x \cdot \cos(nx)$ es función impar \times par \rightarrow **impar**

La integral de una impar en intervalo simétrico es 0:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

Cálculo de b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x+1) \sin(nx) dx$$

Separar:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx \right]$$

Segunda integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0$$

(la sinusoide completa se cancela)

Calculamos la primera:

$x \cdot \sin(nx)$ = impar \times impar = par

Por eso **sí contribuye**.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$$

Resolver por integración por partes:

Sea:

- $u = x, du = dx$
- $dv = \sin(nx) dx, v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$

$$\int x \sin(nx) dx = -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \int \cos(nx) dx$$

Completar en $0 \rightarrow \pi$:

$$\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(n\pi)$$

Pero:

$$\begin{aligned} \sin(n\pi) &= 0 \\ \cos(n\pi) &= (-1)^n \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{\pi}{n} (-1)^n$$

Ahora:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = 2 \left[-\frac{\pi}{n} (-1)^n \right] = -\frac{2\pi}{n} (-1)^n$$

Finalmente:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} (-1)^n \right]$$

$$b_n = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

O equivalentemente:

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Serie de Fourier final

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Interpretación didáctica

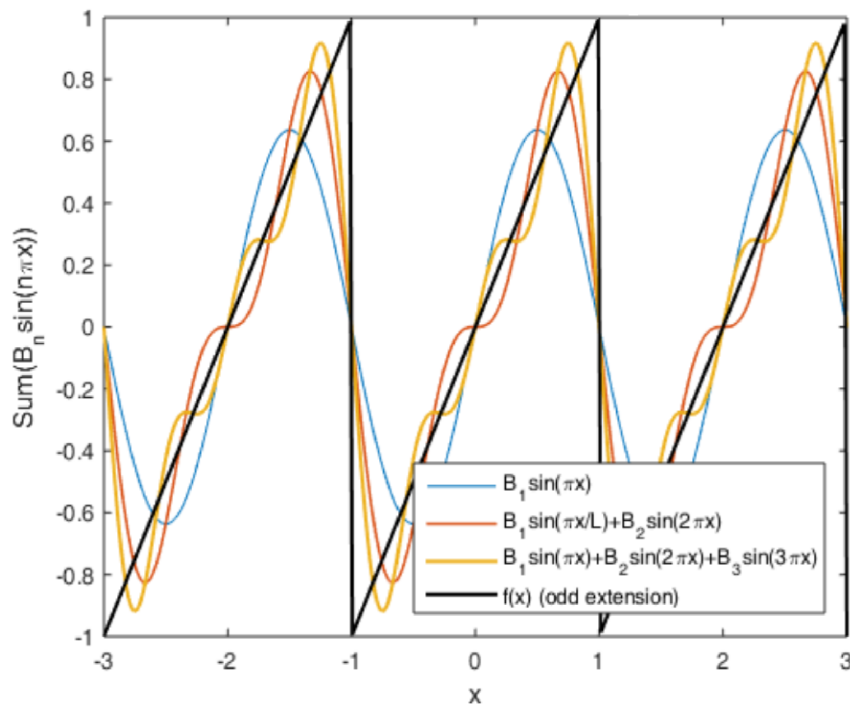
Como la función no es par ni impar \rightarrow tiene solo **senos**, pero NO cosenos.

El término DC = 1 desplaza toda la función hacia arriba.

Las demás ondas senoidales “dibujan” la pendiente del término xxx.

La alternancia $(-1)^{n+1}$ hace que cada seno “apunte” al lado correcto.

El $1/n$ hace que las armónicas altas aporten menos.



7. Onda Diente de Sierra (No Centrada) 鋸

- **Función:** $f(x) = x$ para $0 < x < 2\pi$ (Periodo 2π).
- **Análisis:** Función **General** (no simétrica respecto al origen o al eje y). Necesita a_0 y b_n .
- **Coefficientes:** $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \pi$. $a_n = 0$. $b_n = -\frac{2}{n}$.
- **Serie:**

$$f(x) = \pi - 2 \left[\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(4x) + \dots \right]$$

Este es un caso clásico: la llamada **rampa periódica**.

¿Es par o impar?

No podemos usar directamente par/impar, porque la función está definida en $0 < x < 2\pi$, no en un intervalo simétrico como $-\pi, \pi$

Pero si queremos analizar simetría, podemos extenderla al intervalo $-\pi, \pi$:

Tras un corrimiento equivalente, la extensión queda **impar**.

Conclusión práctica: esta función periódica tiene **solo senos** (no cosenos), excepto por el término DC que puede aparecer o no según el intervalo.

Serie de Fourier general

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx$$

Cálculo del término DC (a_0)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{4\pi^2}{2} \right) = \frac{1}{\pi} (2\pi^2) = 2\pi \\ &\boxed{\frac{a_0}{2} = \pi} \end{aligned}$$

Cálculo de a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) \, dx$$

Resolver por partes:

- $u = x, du = dx$
- $dv = \cos(nx)dx, v = \frac{1}{n} \sin(nx)$

$$\int x \cos(nx) \, dx = \frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

Evaluar en $0 \rightarrow 2\pi$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_0^{2\pi} \right]$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \sin(n \cdot 2\pi) &= 0, & \sin(0) &= 0 \\ \cos(n \cdot 2\pi) &= 1, & \cos(0) &= 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} (1 - 1) \right] = 0 \\ &\boxed{a_n = 0} \end{aligned}$$

Cálculo de b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx$$

Integración por partes:

- $u = x, du = dx$
- $dv = \sin(nx)dx, v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$

$$\begin{aligned} \int x \sin(nx) dx &= -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \int \cos(nx) dx \\ &= -\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \end{aligned}$$

Evaluar en $0 \rightarrow 2\pi$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^{2\pi} \right] \\ \sin(n \cdot 2\pi) &= 0, \quad \sin(0) = 0 \\ \cos(n \cdot 2\pi) &= 1, \quad \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} (1) + \frac{0}{n^2} - 0 \right] \\ b_n &= -\frac{2\pi}{\pi n} = -\frac{2}{n} \end{aligned}$$

$$b_n = -\frac{2}{n}$$

Serie de Fourier final

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \right) \sin(nx)$$

○ más limpio:

$$f(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

Interpretación didáctica

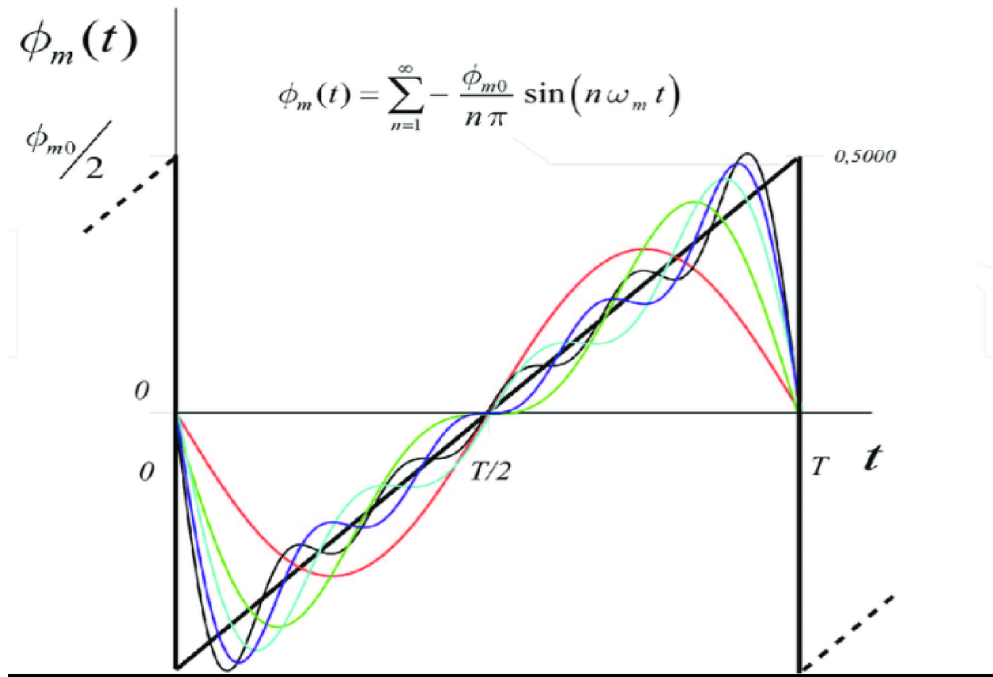
La función crece linealmente \rightarrow la serie está formada solo por **senos** decrecientes $1/n$.

El término DC = π centra la función arriba.

Cada seno "corrige" un pedacito de la rampa.

Las armónicas altas agregan pequeñas ondulaciones para recrear la **rampa perfecta**.

- $-0.318 \cdot \sin(\omega_m t)$
- $-0.318 \cdot \sin(\omega_m t) - 0.159 \cdot \sin(2 \cdot \omega_m t)$
- $-0.318 \cdot \sin(\omega_m t) - 0.159 \cdot \sin(2 \cdot \omega_m t) - 0.106 \cdot \sin(3 \cdot \omega_m t)$
- $-0.318 \cdot \sin(\omega_m t) - 0.159 \cdot \sin(2 \cdot \omega_m t) - 0.106 \cdot \sin(3 \cdot \omega_m t) - 0.0795 \cdot \sin(4 \cdot \omega_m t)$
- $-0.318 \cdot \sin(\omega_m t) - 0.159 \cdot \sin(2 \cdot \omega_m t) - 0.106 \cdot \sin(3 \cdot \omega_m t) - 0.0795 \cdot \sin(4 \cdot \omega_m t) - 0.0636 \cdot \sin(5 \cdot \omega_m t)$



8. Función Exponencial Compleja (Forma Exponencial) e^{ix}

$$f(x) = e^{ix} \quad \text{en } 0 < x < 2\pi, \quad \text{con periodo } 2\pi$$

¿Qué tipo de función es?

No cumple simetría par.

No cumple simetría impar.

No es periódica por naturaleza \rightarrow nosotros la **forzamos a ser periódica**.

Por lo tanto, su serie de Fourier tendrá:

término DC

términos en $\cos(nx)$

términos en $\sin(nx)$

Fórmula general de la Serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix} \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix} \sin(nx) dx$$

Cálculo del término DC

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix} dx$$

$$\int e^{ix} dx = e^{ix}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} [e^{ix}]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} (e^{2\pi i} - 1)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{e^{2\pi i} - 1}{2\pi}}$$

Cálculo de a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cos(nx) dx$$

Este tipo de integral es estándar:

$$\int e^x \cos(nx) dx = \frac{e^x(\cos(nx) + n \sin(nx))}{1 + n^2}$$

Aplicamos límites:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x(\cos(nx) + n \sin(nx))}{1 + n^2} \right]_0^{2\pi}$$

Evaluemos:

En $x = 2\pi$:

- $\cos(n2\pi) = 1$
- $\sin(n2\pi) = 0$

$$e^{2\pi}(\cos(n2\pi) + n \sin(n2\pi)) = e^{2\pi}(1 + 0) = e^{2\pi}$$

En $x = 0$:

- $\cos(0) = 1$
- $\sin(0) = 0$

$$e^0(\cos 0 + n \sin 0) = 1$$

Sustituimos:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{e^{2\pi} - 1}{1 + n^2}$$

$$a_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)}$$

Cálculo de b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin(nx) dx$$

Usamos integral conocida:

$$\int e^x \sin(nx) dx = \frac{e^x(\sin(nx) - n \cos(nx))}{1 + n^2}$$

Evaluamos límites:

En $x = 2\pi$:

- $\sin(n2\pi) = 0$
- $\cos(n2\pi) = 1$

$$e^{2\pi}(0 - n \cdot 1) = -ne^{2\pi}$$

En $x = 0$:

- $\sin 0 = 0$
- $\cos 0 = 1$

$$e^0(0 - n \cdot 1) = -n$$

Por tanto:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-ne^{2\pi} - (-n)}{1 + n^2} \right]$$

Simplificando:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \frac{-n(e^{2\pi} - 1)}{1 + n^2}$$

$$b_n = -\frac{n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1 + n^2)}$$

Serie de Fourier final

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi(1 + n^2)} \cos(nx) - \frac{n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1 + n^2)} \sin(nx) \right]$$

Factor común:

$$f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(nx)}{1 + n^2} - \frac{n \sin(nx)}{1 + n^2} \right) \right]$$

Interpretación didáctica

Como **no tiene simetría**, su descomposición necesita **senos y cosenos**.

La exponencial crece muy rápido → las armónicas grandes tienen amplitud significativa.

El coeficiente común $[(e^{2\pi}) - 1]$ aparece porque la función crece en un periodo.

Esta serie de Fourier es **exacta** y permite reconstruir e^x pero "plegada" cada 2π .

