POLINOMIOS

¿Qué es un polinomio?

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por **términos** del tipo:

$$a_n x^n$$

donde:

an es un **coeficiente** (número real).
x es la variable.
n es un exponente **entero , no negativo**.

Ejemplo:

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 5$$

¿Los monomios pertenecen a los polinomios?

Sí. Un polinomio está formado por monomios.

Un **monomio** es **un solo término**, del tipo:

$$a_n x^n$$

Elementos de un polinomio

Coeficientes: los números (3, –2, 7, –5).
Términos:

$$3x^4,\ -2x^3,\ 7x,\ -5.$$

Grado del polinomio: el mayor exponente (grado = 4).
Término independiente: el que no tiene x: **–5**.
Coeficiente principal: el coeficiente del mayor exponente (3).

¿Qué es un término?

Un **término** es cada una de las partes que componen una expresión algebraica y que están separadas por signos + o −.

Ejemplo:

$$5x^3 - 2x + 7$$

Tiene **tres términos**:

- $5x^3$
- $-2x$
- 7

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS TÉRMINOS

Estas son las reglas clave que controlan cómo se trabajan los términos de una expresión o polinomio.

Un término tiene hasta tres componentes

Todo término puede escribirse así:

$$\text{coeficiente} \times \text{variable}^{\text{exponente}}$$

Ejemplo:

$$-4x^5$$

Coeficiente: **–4**
Variable: **x**
Exponente: **5**

Si el término es solo un número, como **7**, entonces:

variable implícita: x0x^0x0
coeficiente: 7
grado: 0

Los términos pueden ser positivos o negativos

El signo **pertenece al término, no a la operación.**

Ejemplo:

$5x^2 - 3x + 1$

Los términos son:

- $+5x^2$
- $-3x$
- $+1$

El grado de un término es el exponente

grado de $7x^4$ → **4**

grado de $-2x$ → **1**

grado de 9 → **0**

grado de $3x^8y^2$ → **10** (8 + 2, si hay varias variables)

Dos términos son semejantes si tienen la MISMA parte literal

Parte literal = variables + exponentes.

Ejemplos de términos semejantes:

$5x^3$ y $-2x^3$

$7xy^2$ y $-3xy^2$

No semejantes:

x^2 y x^3

$2xy$ y $2x^2y$

$4x$ y $4y$

Solo los términos semejantes se pueden sumar o restar

Ejemplo válido:

$$5x^2 + 7x^2 = 12x^2$$

Ejemplo NO válido:

$$5x^2 + 3x = \text{no se combinan}$$

Multiplicación de términos

Se multiplican coeficientes
Se suman exponentes de cada variable

Ejemplo:

$$(3x^2)(4x^5) = 12x^7$$

Con varias variables:

$$(2x^3y)(3x^2y^4) = 6x^5y^5$$

División de términos

Se dividen coeficientes
Se restan exponentes

Ejemplo:

$$\frac{12x^7}{4x^3} = 3x^4$$

Un término con exponente cero es un número

$$ax^0 = a$$

Todo término constante es un monomio de grado 0.

El orden estándar de los términos es según su grado

Un polinomio se escribe:

de **grado mayor a menor**,
o de **menor a mayor**, según convenga.

Ejemplo:

$$3x^4 + x^2 - 5x + 1$$

Un término con coeficiente 1 o −1 se simplifica

$$1x^3 = x^3$$

$$-1x^2 = -x^2$$

PROPIEDADES DEL COEFICIENTE

El **coeficiente** es el número que multiplica a la parte literal del término (la variable y su exponente).

Ejemplo en cada caso:

$$5x^3 \quad \text{coeficiente} = 5$$

El coeficiente puede ser positivo o negativo

- $+4x$
- $-7x^2$

El **signo pertenece al término completo**.

Si el coeficiente vale 1 o –1, no se escribe el número

$$1x^3 = x^3$$
$$-1x^2 = -x^2$$

Si el coeficiente es 0, el término desaparece

$$0x^5 = 0 \quad \Rightarrow \text{no se escribe}$$

Esto afecta directamente al **grado del polinomio**.

Al sumar o restar términos semejantes, se suman o restan sus coeficientes

$$5x^3 - 2x^3 = 3x^3$$
$$7xy^2 + 4xy^2 = 11xy^2$$

Al multiplicar monomios, se multiplican los coeficientes

$$(3x^2)(-2x^5) = -6x^7$$

El coeficiente afecta el "alto" o "bajo" de la gráfica

En polinomios, el coeficiente del término de mayor grado controla:

si la curva sube o baja
la pendiente general
la forma principal de la gráfica

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 \quad \text{sube más rápido}$$
$$P(x) = 0.5x^3 \quad \text{sube más lento}$$

PROPIEDADES DEL GRADO

El **grado** de un término es el exponente de su variable.
El grado de un polinomio es el mayor grado entre sus términos.

Ejemplos:

$$7x^5 \quad \text{grado} = 5$$
$$3x \quad \text{grado} = 1$$
$$8 \quad \text{grado} = 0$$

El grado determina la "forma" de la función

grado 1 → recta
grado 2 → parábola
grado 3 → cúbica
grado 4 → ondulada (W)
grado 5 → más oscilaciones

El grado disminuye si un término desaparece

Si el coeficiente del mayor grado se vuelve 0, el grado del polinomio baja.

Ejemplo:

$$P(x) = 4x^4 + 2x^2 \quad \text{grado 4}$$

Si el término $4x^4$ desaparece:

$$2x^2 \quad \text{grado 2}$$

Grado en suma y resta

$$\text{grado}(P+Q) \leq \max(\text{grado}(P), \text{grado}(Q))$$

Ejemplo:

$$(3x^4 + x) + (x^3 - 5) = 3x^4 + x^3 + x - 5$$

El grado resultante = 4.

Grado en multiplicación

$$\text{grado}(P \cdot Q) = \text{grado}(P) + \text{grado}(Q)$$

Ejemplo:

$$(x^2)(x^3) = x^5$$

Grado en división por monomios

$$\frac{x^7}{x^2} - x^5$$

Operaciones con polinomios

Suma

Suma de términos semejantes.

Ejemplo:

$$(3x^3 - 2x + 5) + (x^3 + 7x - 1)$$
$$= 4x^3 + 5x + 4$$

Resta

$$(6x^2 + 3x - 8) - (4x^2 - x + 2)$$
$$= 2x^2 + 4x - 10$$

Multiplicación

Distribuir cada término.
Ejemplo:

$$(2x + 3)(x - 4)$$
$$= 2x^2 - 8x + 3x - 12$$
$$= 2x^2 - 5x - 12$$

División sintética (Regla de Ruffini)

Solo aplica cuando divides por un término de la forma x−a.

Ejemplo:

Dividir

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ entre $x - 2$.

Factorización básica de polinomios

Factor común

$$6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x - 3)$$

Trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Trinomio general

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Diferencia de cuadrados

$$9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$$

Evaluación de polinomios

Sustituir un valor en x.

Ejemplo:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$$

Evaluar en $x = 2$:

$$P(2) = 8 - 8 + 8 - 7 = 1$$

Raíces de un polinomio

Una *raíz* es un valor que hace que el polinomio valga cero.

Ejemplo:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

Raíces: **2** y **3**.

PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS

Las propiedades de los polinomios se derivan de cómo se comportan en relación con:

sus términos (monomios),
su grado,
sus operaciones,
y su representación gráfica.

A continuación están explicadas de forma sencilla.

CIERRE OPERACIONAL

Los polinomios son **cerrados** bajo:

Suma
La suma de dos polinomios es siempre otro polinomio.

$$(3x^2 + x) + (x^2 - 5) = 4x^2 + x - 5$$

Resta
La resta también da como resultado un polinomio.

$$(5x^3 - x) - (2x^3 + 4) = 3x^3 - x - 4$$

Multiplicación
La multiplicación de dos polinomios es otro polinomio.

$$(x + 2)(x^2 - 3) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$$

No aparece división entre variables, por eso sigue siendo polinomio.

NO TODO COCIENTE ES POLINOMIO

La división **solo** mantiene la forma de polinomio si el divisor es:

un número real, o
un monomio de la forma x−rx - rx−r (división sintética).

Si divido por algo que no sea monomio:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

Esto **no es un polinomio** (aunque da un resultado parcialmente reducible).

EL GRADO DICE TODO

El grado de un polinomio es el **exponente más grande** con coeficiente distinto de cero.
Grado 1 → recta
Grado 2 → parábola
Grado 3 → cúbica
Grado 4 → “W”

Propiedad clave:

$$\text{grado}(P + Q) \leq \max(\text{grado}(P), \text{grado}(Q))$$
$$\text{grado}(P \cdot Q) = \text{grado}(P) + \text{grado}(Q)$$

CONTINUIDAD Y SUAVIDAD

Todos los polinomios tienen estas características:

Son continuos
No tienen saltos, huecos ni asíntotas.

Son derivables infinitas veces
Toda derivada de un polinomio es otro polinomio.

Ejemplo:

$$P(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$
$$P'(x) = 4x^3 - 4x$$

PROPIEDAD DEL SIGNO DEL COEFICIENTE PRINCIPAL

Para grandes valores de x, el comportamiento está dictado por el término de mayor grado:

$$a_n x^n$$

Esto permite predecir la **forma general de la gráfica**.

- Si $a_n > 0$, la curva tiende a $+\infty$ a la derecha.
- Si $a_n < 0$, tiende a $-\infty$ a la derecha.

Esto permite predecir la **forma general de la gráfica**.

NÚMERO DE RAÍCES

Un polinomio de grado **n** tiene:

a lo más, raíces reales,
exactamente n raíces complejas (contando multiplicidad).

Ejemplos:

Grado 2 → máximo 2 raíces reales
Grado 3 → máximo 3 cortes en el eje X

OPERACIONES ASOCIATIVAS, CONMUTATIVAS Y DISTRIBUTIVAS

Los polinomios cumplen:

Suma conmutativa

$P + Q = Q + P$

Suma asociativa

$(P + Q) + R = P + (Q + R)$

Multiplicación distributiva

$P(Q + R) = PQ + PR$

VALOR NUMÉRICO (EVALUACIÓN)

Para cualquier número real x0, siempre se puede calcular:

$$P(x_0)$$

Porque los polinomios:

No generan división entre cero
No tienen raíces en el denominador
No tienen exponentes no permitidos

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 - x + 5$$
$$P(2) = 2(8) - 2 + 5 = 19$$

FACTORIZACIÓN

Muchos polinomios pueden escribirse como producto de otros más simples:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Esto permite:

encontrar raíces,
simplificar expresiones,
visualizar mejor la gráfica.

COMPORTAMIENTO AL INFINITO

Para valores muy grandes:

$$P(x) \approx a_n x^n$$

Esto explica por qué todas las curvas de grado 3 se parecen a una S, y todas las de grado 2 a parábolas.

Ejercicios resueltos

Suma

$(4x^2 + x - 7) + (3x^2 - 5x + 1) = 7x^2 - 4x - 6$

Resta

$(9x^3 - x + 4) - (3x^3 + 5x - 2) = 6x^3 - 6x + 6$

Multiplicación

$(x + 4)(x - 3) = x^2 + x - 12$

Multiplicación con trinomio

$$
\begin{aligned}
&(2x - 1)(x^2 + x - 6) \\
&= 2x^3 + 2x^2 - 12x - x^2 - x + 6 \\
&= 2x^3 + x^2 - 13x + 6
\end{aligned}
$$

División sintética

Dividir $2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ entre $x + 1$.

Resultado:

$$2x^2 + 3x - 7 + \frac{8}{x + 1}$$

Factoriza

$x^2 - 11x + 28 = (x - 7)(x - 4)$

Factor común

$8x^4 - 12x^3 = 4x^3(2x - 3)$

Diferencia de cuadrados

$25x^2 - 1 = (5x - 1)(5x + 1)$

Raíces

$x^2 - 9x + 20 = 0$

Raíces: **4 y 5**.

Evaluación

$P(x) = 3x^3 - x + 2, \quad P(1) = 4$

EJERCICIO 1 — Hallar coeficientes y grados

$$P(x) = 7x^3 - 4x + 9$$

Términos: $7x^3$, $-4x, 9$

coeficiente del primer término = **7**
coeficiente del segundo término = **–4**
coeficiente del término constante = **9**
grado del polinomio = **3** (el mayor exponente)

Respuesta final: coeficientes 7, –4, 9 y grado 3.

EJERCICIO 2 — Sumar polinomios

$$P(x) = 5x^2 + 3x - 1$$
$$Q(x) = 2x^2 - 7x + 4$$

Sumamos términos semejantes:

$$(5x^2 + 2x^2) + (3x - 7x) + (-1 + 4)$$
$$= 7x^2 - 4x + 3$$

Respuesta final: $7x^2 - 4x + 3$, grado 2.

EJERCICIO 3 — Multiplicar monomios

$$(3x^4)(-2x^3) = -6x^7$$

Multiplicas coeficientes: $3 \cdot -2 = -6$

Sumas exponentes: $4 + 3 = 7$

Respuesta final: $-6x^7$

EJERCICIO 4 — Determinar grado después de simplificar

$$P(x) = 4x^5 - 2x^5 + 7$$

Simplificación:

$$(4x^5 - 2x^5) + 7 = 2x^5 + 7$$

Grado del resultado = **5**

Respuesta final: $2x^5 + 7$, grado 5.

EJERCICIO 5 — Evaluación con coeficientes y grado

$$P(x) = -3x^4 + 2x^2 - 5$$

a) coeficiente principal = **–3**

b) grado = **4**

c) $P(2)$:

$$-3(16) + 2(4) - 5 = -48 + 8 - 5 = -45$$

Respuesta final: coef. principal –3, grado 4, $P(2) = -45$.