GEOMETRÍA ANALÍTICA

Introducción

La **Geometría Analítica** es la rama de las matemáticas que combina el **lenguaje geométrico** (figuras, puntos, distancias) con el **lenguaje algebraico** (números y ecuaciones).

Su fundamento principal es el **plano cartesiano**, propuesto por **René Descartes (1596–1650)**, quien descubrió que cada punto del plano puede representarse mediante **dos números** llamados **coordenadas**.

¿Qué es la geometría analítica y para qué sirve?

Es una rama de la matemática que estudia las figuras mediante coordenadas y ecuaciones, uniendo álgebra y geometría.

Ejemplo:

Una recta no se estudia solo como una figura visual, sino como una ecuación del tipo

Sistema de coordenadas cartesianas

Plano cartesiano

Está formado por dos rectas perpendiculares llamadas:

Eje X (horizontal)
Eje Y (vertical)

El punto donde se cruzan se llama origen y se denota como O = (0, 0).

Coordenadas de un punto

Un punto en el plano se representa como un par ordenado:

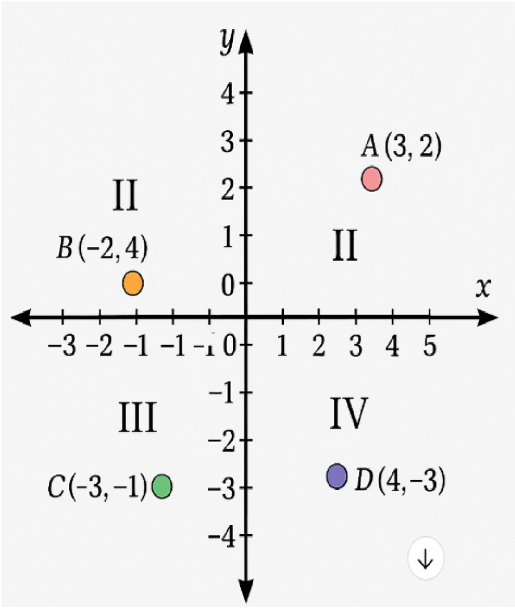
$$P = (x, y)$$

Donde

x: distancia horizontal desde el origen (positivo a la derecha)
y: distancia vertical desde el origen (positivo hacia arriba)

Cuadrantes

El plano se divide en cuatro cuadrantes:
I. $x > 0$, $y > 0$
II. $x < 0$, $y > 0$
III. $x < 0$, $y < 0$
IV. $x > 0$, $y < 0$



Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos A(x1, y1) y B(x2, y2), la distancia (d) entre ellos es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo formado por los puntos en el plano.

Punto medio de un segmento

El **punto medio** de un segmento es **el punto que divide al segmento en dos partes iguales**.

Si un segmento une dos puntos cualesquiera A(x1,y1) y B(x2,y2), su punto medio M(xm,ym) se localiza exactamente a la mitad de la distancia entre ambos.

Geométricamente, este punto está sobre la recta que une A y B, y cumple que: AM=MB

Dado un segmento con extremos A(x1, y1) y B(x2, y2), el punto medio (M) es:

$$M(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Pendiente de una recta

La **pendiente** de una recta es una medida que indica **qué tan inclinada está una recta** respecto al eje X.

En otras palabras, la pendiente nos dice **cuánto aumenta o disminuye el valor de y** cuando **x aumenta una unidad**.

Visualmente:

Si la recta **sube hacia la derecha**, la pendiente es **positiva**.
Si la recta **baja hacia la derecha**, la pendiente es **negativa**.
Si la recta es **horizontal**, la pendiente es **cero**.
Si la recta es **vertical**, la pendiente es **infinita o indefinida**.

Tipos de pendiente.

m > 0, la recta sube hacia la derecha.
m < 0, la recta baja hacia la derecha.
m = 0, recta horizontal.

Relaciones importantes

Recta horizontal: m = 0.
Recta vertical: m indefinida (división por 0).
Rectas paralelas : Tienen misma pendiente
Rectas perpendiculares : El producto de sus pendientes es -1.

Fórmula de la pendiente

Dada una recta que pasa por dos puntos cualesquiera A(x1,y1) y B(x2,y2) la **pendiente m** se calcula como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Lugar Geométrico

Un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos que cumplen una condición específica.

Ejemplos:

Los puntos equidistantes a un punto fijo: circunferencia.
Los puntos equidistantes a una recta y un punto: parábola.

Un lugar geométrico se estudia como una figura cuyos puntos cumplen una misma relación algebraica (una ecuación).

Ejemplos sencillos

1. Circunferencia como lugar geométrico.
   Todos los puntos que están a una distancia fija 'r' de un punto fijo C(h, k) forman una circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

2. Recta como lugar geométrico.
   Todos los puntos que están alineados de tal forma que su pendiente con respecto a otros es constante:

$$y = mx + b$$

3. Parabola como lugar geométrico.
   Conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo (foco) y una recta fija (directriz):

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad \text{o} \quad (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Método para construir lugares geométricos

Para hallar la ecuación de un lugar geométrico:

1. Asigna coordenadas generales a un punto cualquiera del plano: P(x, y)
2. Plantea la condición que define al lugar geométrico.
3. Expresa esa condición como una ecuación algebraica.
4. Simplifica la ecuación si es posible.

Ejemplo:

Encuentra el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de los puntos A(0, 2) y B(4, 0)

1. Sea P(x, y) un punto del lugar geométrico, queremos que distancia de P a A = distancia de

2. distancia $\sqrt{[(x - 0)^2 + (y - 2)^2]} = \sqrt{[(x - 4)^2 + (y - 0)^2]}$

3. elevando al cuadrado $x^2 + (y - 2)^2 = (x - 4)^2 + y^2$

4. Expandimos: $x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2$

5. Simplificamos: $-4y + 4 = -8x + 16$

6. Resultado : $8x - 4y = 12$, $2x - y = 3$

CIRCUNFERENCIA

¿Qué es una circunferencia?

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia constante 'r' (radio) de un punto fijo C(h, k) lamado centro.

Ecuación canónica o estándar:

Si el centro es C(h, k) y el radio es 'r', la ecuación de la circunferencia es:

$$\mathbf{(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2}$$

Ejemplo 1:

Circunferencia con centro C(2, -3) y radio r = 5:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Ecuación general de la circunferencia

La expansión de la forma estándar da lugar a la ecuación general:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

donde:

$D = -2h$,
$E = -2k$,
$F = h^2 + k^2 - r^2$

Esta ecuación no tiene término xy ni coeficientes diferentes para x^2 y y^2.

Ejemplo 2:

Dada la ecuación general:

$$x^2 + y^2 -6x + 4y -3 = 0$$

Agrupamos:

$$(x^2 -6x) + (y^2 + 4y) = 3$$

Completamos cuadrados:

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 = 3$$

entonces:

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Centro: C(3, -2), radio: $r = \sqrt{16} = 4$

Elementos de la circunferencia

Centro (C): Punto fijo de referencia.
Radio (r): Distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia.
Diámetro : 2r.
Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia.
Arco: Parte del contorno.
Tangente: Recta que toca a la circunferencia en un solo punto.
Secante: Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Intersección con ejes

Para encontrar los puntos donde la circunferencia corta los ejes, se hacen:

Con eje X : Sustituir $y = 0$ en la ecuación.
Con eje Y : Sustituir $x = 0$ en la ecuación.

PARÁBOLA

¿Qué es una parábola?

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

Elementos de la parábola

Vértice (V): Punto medio entre el foco y la directriz.
Foco (F): Punto fijo al que se mide la distancia.
Directriz (d): Recta fija perpendicular al eje de simetría.
Eje de simetría: Línea que pasa por el vértice y el foco.
Lado recto: Segmento que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría.
Su longitud es '**4p**' donde '**p**' es la distancia del vértice al foco.

Ecuaciones de la parábola

Hay cuatro formas canónicas básicas dependiendo de la orientación del eje de simetría y la posición del vértice.

A. Parábola con eje horizontal (abre a la derecha o izquierda):

$$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$

Vértice: (h, k)
Foco: $(h + p, k)$
Directríz: $x = h - p$

B. Parábola con eje vertical (abre hacia arriba o abajo):

$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$

Vértice: (h, k)
Foco: $(h, k + p)$
Directriz: $y = k - p$

Nota:
Si $p > 0$, abre hacia la derecha o arriba.
Si $p < 0$, abre hacia la izquierda o abajo.

Ejemplo 1:

Parábola con vértice en el origen, eje vertical, que abre hacia arriba, con $p = 2$.

Ecuación: $x^2 = 8y$

Vértice: $(0, 0)$
Foco: $(0, 2)$
Directriz: $y = -2$
Lado recto: Longitud $4p = 8$, perpendicular al eje Y

Forma general de la parábola

$$\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Una ecuación representa una parábola si y solo si:

$$b^2 - 4ac = 0$$

Ubicación del vértice y foco:
Si tienes la forma

$$(x - h)^2 = 4p\,(y - k),$$

entonces

Vértice: (h, k)
Foco: $(h, k + p)$
Directriz: $y = k - p$

ELIPSE

¿Qué es una elipse?

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Elementos principales de la elipse

Centro (C): Punto medio entre los focos.
Focos (F y F'): Dos puntos fijos sobre el eje mayor.
Eje mayor: Segmento más largo que une dos puntos extremos de la elipse y pasa por los focos.
Eje menor: Segmento perpendicular al eje mayor que también pasa por el centro.
Vértices: Puntos extremos del eje mayor.
Co-vértices: Puntos extremos del eje menor.
Distancia focal (2c): Distancia entre los dos focos.
Excentricidad (e): Relación entre distancia focal y eje mayor : $e = c/a$.

Ecuación canónica de la elipse

A. Eje mayor horizontal (más largo sobre el eje x):

$$(x - h)^2 / a^2 + (y - k)^2 / b^2 = 1$$

Centro : (h, k)
a : semieje mayor (horizontal)
b : semieje menor (vertical)
Focos : $(h, \pm c, k)$
donde : $c^2 = a^2 - b^2$

B. Eje mayor vertical (más largo sobre el eje y) :

$$(x - h)^2 / b^2 + (y - k)^2 / a^2 = 1$$

Centro : (h, k)
a : semieje mayor (vertical)
b : semieje menor (horizontal)
Focos : $(h, \pm c, k)$
donde: $c^2 = a^2 - b^2$

Observaciones:

Si $a = b$, la elipse se convierte en una circunferencia.
Siempre se cumple: $a > b$
Excentricidad: $e = c/a$, $0 < e < 1$

Ejemplo 1 (Eje horizontal):

Ecuación : $(x - 2)^2 / 9 + (y + 1)^2 / 4 = 1$
Centro (2, -1) $a^2 = 9$, entonces $a = 3$ $b^2 = 1$, entonces $b = 1$
$c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{5} \approx 2.24$
Focos : $(2 \pm \sqrt{5}, -1)$

Ejemplo 2 (eje vertical):

Ecuación: $(x + 1)^2 / 1 + (y - 2)^2 / 16 = 1$
Centro (-1, 2)
$a^2 = 16$, entonces $a = 4$ $b^2 = 4$, entonces $b = 2$

$c = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(16 - 1)} = \sqrt{15}$
Focos : $(-1, 2 \pm \sqrt{15})$

Forma general de la elipse:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se representa una elipse si y solo si: 'A' es diferente de 'B' y A, B > 0

HIPÉRBOLA

¿Qué es una hipérbola?

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante.

A diferencia de la elipse (donde la suma es constante), en la hipérbola:

$$|PF1 - PF2| = \text{constante}$$

Elementos de la Hipérbola

Centro (C): Punto medio entre los focos.
Focos (F_1, F_2): Puntos fijos que definen la hipérbola.
Vértices (V_1, V_2): Puntos donde la hipérbola corta su eje principal.
Eje Transversal: Eje que une los vértices.
Eje Conjugado: Perpendicular al eje transversal y también pasa por el centro.
Asíntotas: Rectas que la hipérbola se va acercando pero nunca toca.
Lado recto: Segmento perpendicular al eje focal que pasa por los focos y cumple con

$$LR = 2\,b^2 / 2.$$

Ecuaciones canónicas

1. **Hipérbola con eje horizontal** (abre a la izquierda y derecha)

$$(x - h)^2 / a^2 - (y - k)^2 / b^2 = 1$$

2. **Hipérbola con eje vertical** (abre hacia arriba y abajo)

$$(y - k)^2 / a^2 - (x - h)^2 / b^2 = 1$$

donde:

(h, k) es el centro
a: distancia del centro a cada vértice
b: se relaciona con el eje conjugado
c: distancia del centro a cada foco

Relación entre a, b y c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Asíntotas de la hipérbola

Para eje horizontal:

$$y - k = \pm\ b/a\ (x - h)$$

Para eje vertical:

$$y - k = \pm\ a/b\ (x - h)$$

Observaciones importantes

La hipérbola tiene dos ramas.
Las asíntotas guían la forma de la curva.
El término negativo siempre es el que indica el eje conjugado.
El eje donde aparece el término positivo indica el sentido de apertura (horizontal o vertical).

Ejemplo:
$a = 4$, $c = 5$

Entonces
$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$
$b = 3$.

Ecuación
$x^2/16 - y^2/9 = 1$

Asíntotas
$y = \pm\ 3x / 4$

VECTORES

¿Qué es un vector?"

Un vector es un objeto matemático que tiene:
Dirección, Sentido y Magnitud (o módulo).

En el plano, un vector se representa como un segmento de recta orientado, desde un punto de origen hasta un punto terminal.

Nota: Una flecha debe ir arriba de la o las letras por ejemplo V y de AB

Notación

Un vector se denota como:

v→ = (a, b)

O bien, si va del punto A(x1, y1) al punto B(x2, y2)

AB→ = (x2 - x1, y2 - y1)

Componentes de un vector

Si un vector parte del origen y termina en el punto P(a, b), sus componentes son:

v→ = ai^ + bj^

donde:

a: componente en ´x´
b: componente en 'y'
i^, **j^** vectores unitarios en dirección 'x' y 'y'.

Magnitud de un vector:

La magnitud o longitud de un vector

v→ = (a, b)

es:

lv→l = √(a² + b²)

Operaciones con vectores:

Suma de vectores $\vec{u} + \vec{v} = (u1 + v1, u2 + v2)$
Resta de vectores $\vec{u} - \vec{v} = (u1 - v1, u2 - v2)$
Multiplicación por un escalar $k \cdot \vec{v} = (k \cdot a, k \cdot b)$

Vector unitario:

Un vector unitario tiene magnitud igual a 1. Se obtiene dividiendo un vector entre su magnitud:

$$\vec{v} = \vec{v} / |\vec{v}|$$

Producto punto (o escalar):

El producto escalar de dos vectores

$$\vec{u} = (a, b) \text{ y } \vec{v} = (c, d)$$

es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a \cdot c) + (b \cdot d)$$

Se usa para encontrar el ángulo entre dos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta$$

Ángulo entre dos vectores:

$$\cos\theta = \vec{u} \cdot \vec{v} / |\vec{u}|\,|\vec{v}|$$

Dirección de un vector:

Se puede encontrar el ángulo de dirección que forma el vector con el eje 'x' usando la tangente

$$\theta = \tan^{-1} (b / a)$$

Ejemplo:

Dado el vector que va del punto A(1, 2) al punto B(4, 6):

$\vec{AB} = (4 - 1, 6 - 2) = (3, 4)$
Magnitud: $|\vec{AB}| = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{25} = 5$
Vector unitario:

$$\vec{v} = (3/5, 4/5)$$

EJEMPLOS

Ejemplo 1:
Calcula la distancia entre los puntos A(3, 2) y B(-1, -2).

Usando fórmula de distancia:

$d = \sqrt{[(-1-3)^2 + (-2, -2)^2]} = \sqrt{[(-4)^2 + (-4)^2]} = \sqrt{(16 + 16)} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Ejemplo 2:
Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(1, 2) y Q(4, -1).

Primero calculamos la pendiente 'm'.
Segun la fórmula

$$m = (-1-2)/(4-1) = -3/3 = -1$$

Usamos la forma punto-pendiente con P(1, 2).

$$(y - 2) = -1 (x - 1)$$

entonces la ecuación es:

$$y = -x + 3$$

Ejemplo 3:
Encontrar el punto medio del segmento que une A(5, -3) y B(1, 7).

Usando la fórmula de punto medio:

$M = [(5 + 1)/2 , (-3 + 7)/2] = (3, 2)$ que es el punto medio

Ejemplo 4:
Encontrar el vector $\overrightarrow{AB}$ con A(-2, 5) y B(3, -1).

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3-(-2), -1-5) = (5, -6)$

entonces el vector

$$\overrightarrow{AB} = (5, -6)$$

Ejemplo 5:
Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en C(2, -1) y radio r = 5.

Usando la fórmula

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

entonces la ecuación es:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

Ejemplo 6:
Clasificar la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Es una elipse, porque los coeficientes de x^2 y y^2 son positivos pero diferentes.

Forma canónica:

$$x^2/9 + y^2/4 = 1$$

Ejemplo 7:
¿Dónde se intersectan las rectas $y = 2x + 1$ y $y = -x + 4$?

Igualamos ambas ecuaciones:

$$2x + 1 = -x + 4$$

entonces:

$$3x = 3,\ \ x = 1\ \ y = 2(1) + 1 = 3$$

Intersección en (1, 3)

Ejemplo 8:
Encontrar la ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en (0, 3).

Como el foco está en el eje Y, la parábola es vertical.

Distancia del vértice al foco:
$p = 3$.

Ecuación canónica:

$$x^2 = 4py$$

entonces:

$$x^2 = 4(3)$$

y por lo tanto la ecuación es:

$x^2 = 12y$"

Ejemplo 9:
Calcular el área del triángulo cuyos vértices son: A(1,2), B(4,5) y C(6, 1).

Usamos la fórmula:

Área = 1/2 [x1(y2 - y3) + x2(y3 - y1) + x3(y1 - y2)]
1/2[(1(5 - 1) + 4(1 - 2) + 6(2 - 5)] = 1/2[1(4) + 4(-1) + 6(-3)] =
1/2[(4 - 4 - 18)] = 1/2(18) = 9

Ejemplo 10:
Encontrar la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, vértices en (±4, 0) y asíntotas y = ± 3x/4. Para una hipérbola horizontal: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

Como los vértices están en x = ± 4, a = 4. $a^2 = 16$.
Las asíntotas dan b/a = 3/4.

entonces b = 3, $b^2 = 9$.
La ecuación es $x^2/16 - y^2/9 = 1$.

Ejemplo 11:
Hallar la pendiente de la recta perpendicular a y = 2x - 5. (y = mx + b).

La pendiente de la recta dada es m = 2.
La pendiente de una recta perpendicular es la negativa recíproca:

m = -1/2

Ejemplo 12:
Describir el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de A(0, 4) y B(6, 0).

La mediatriz del segmento AB es el lugar geométrico buscado.

Punto medio:

M = [(0 + 6)/2, (4 + 0)/2] = (3, 2)

Pendiente de AB:

m = (0 - 4)/(6 - 0) = -2/3.

Pendiente de la mediatriz:

3/2 (negativa recíproca).

Ecuación usando punto pendiente con M(3, 2):

$$y - 2 = 3/2\ (x - 3)$$

por tanto:

$$y = 3x/2 - 5/2.$$

Ejemplo 13:
Determinar la longitud del eje focal de la parábola $y^2 = 12x$.

Forma:

$$y^2 = 4px$$

Aquí, $4p = 12$ por tanto $p = 3$.

El eje focal es $4p = 12$ unidades.